Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ"

**В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц**

# МАТЕМАТИКА

Задачи, примеры, упражнения, тесты

Электронное пособие для учащихся факультета довузовской подготовки

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2008

УДК 51
ББК В1

Математика. Пособие для учащихся факультета довузовской подготовки /В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьева, М.А. Шварц–СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008.–495с.

Пособие содержит справочный материал, основные определения и формулы, методические указания и примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения в стандартной и тестовой формах задания, обучающие и контрольные тесты. Все примеры и задачи снабжены ответами.

Предназначено для выпускников школ, лицеев, колледжей, а также слушателей подготовительных отделений вузов.

УДК 51
ББК В1

# 1 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## *1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

### ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

1. Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра делились на 2.
2. Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.
3. Для того чтобы число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы две его последние цифры образовали число, которое делится на 4.
4. Для того чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последней цифрой был 0 или 5.
5. Для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

### НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ, НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

1. Наибольший общий делитель НОД$(a, b)$ двух чисел $a$ и $b$ – произведение простых множителей, входящих в оба числа, в наименьшей степени.
2. Наименьшее общее кратное НОК$(a, b)$ двух чисел $a$ и $b$ – произведение простых множителей, входящих хотя бы в одно из чисел, в наибольшей степени.

### ПРОПОРЦИИ $(a, b, c, d \neq 0)$.

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = cb;\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{c};\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};$

$$\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

### СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ $(a > 0, b > 0)$.

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}.$

4. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}.$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.     6. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, ($\sqrt{a^2} = |a|$).

## СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .     2. $(a^m)^n = a^{mn}$ .

3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ .     4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ .

5. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ .     6. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ .

7. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .     8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

## ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
5. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

## ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1$ и $x_2$ – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

### *1.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

1. Найдите НОК и НОД чисел 396 и 3528.

*Решение*.

Разложим данные числа на простые множители:

$$396 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11;$$

$$3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

В соответствии с определением НОК(396, 3528) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ = 38808, НОД(396, 3528) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

*Ответ*: 38808; 36.

2. Разделите число 180 на части пропорционально числам 1; 2; 3.

*Решение.*

$$\frac{180}{1+2+3}\cdot 1=30;\quad \frac{180}{1+2+3}\cdot 2=60;\quad \frac{180}{1+2+3}\cdot 3=90.$$

*Ответ*: 30; 60; 90.

3. Разделите число 188 на части обратно пропорционально числам 3; 4; 5. Указание. Для того чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, необходимо разделить это число на части прямо пропорционально числам, обратным данным.

*Решение.*

$$\frac{188}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{3}=80;\quad \frac{188}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{4}=60;\quad \frac{188}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{5}=48.$$

*Ответ*: 80; 60; 48.

4. Сумма трех первых членов пропорции равна 33. Найдите четвертый член пропорции, если второй член составляет 1/5, а третий 2/9 первого числа.

*Решение.*

Согласно условию, $a + b + c = 33$, $b=\frac{1}{5}a$, $c=\frac{2}{9}a$. Следовательно,

$$a+\frac{1}{5}a+\frac{2}{9}a=33 \Rightarrow a=\frac{33\cdot 45}{64},\ b=\frac{33\cdot 9}{64},\ c=\frac{33\cdot 5}{32}.$$

По свойству пропорции $d=\frac{b\cdot c}{a}=\frac{33}{32}$.

*Ответ*: $\frac{33}{32}$.

5. Найдите число, если известно, что 55,5 составляет 18,75% этого числа.

*Решение.*

Неизвестное число обозначим $x$. Тогда

$$\frac{55{,}5}{x}=\frac{18{,}75}{100} \Rightarrow x=\frac{55{,}5\cdot 100}{18{,}75}=296.$$

*Ответ*: 296.

6. На сколько процентов изменится дробь, если числитель увеличить на 20%, а знаменатель уменьшить на 10%?

*Решение*.

$$\frac{\dfrac{a+0{,}2a}{b-0{,}1b}-\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}}\cdot 100\%=\frac{\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{1{,}2}{0{,}9}-1\right)}{\dfrac{a}{b}}\cdot 100\%=\frac{100}{3}\%=33,(3)\%.$$

*Ответ*: 33,(3)%.

7. Вычислите: $\dfrac{3\frac{5}{6}-37\frac{1}{3}:\frac{7}{2}}{\left(1\frac{11}{18}+1\frac{19}{24}\right):\frac{49}{16}}+6{,}15.$

*Решение*.

$$\frac{3\frac{5}{6}-37\frac{1}{3}:\frac{7}{2}}{\left(1\frac{11}{18}+1\frac{19}{24}\right):\frac{49}{16}}+6{,}15=\frac{\frac{23}{6}-\frac{112}{3}\cdot\frac{2}{7}}{\left(\frac{29}{18}+\frac{43}{24}\right)\cdot\frac{16}{49}}+\frac{615}{100}=\frac{\frac{23}{6}-\frac{32}{3}}{\frac{116+129}{72}\cdot\frac{16}{49}}+\frac{123}{20}=$$

$$=\frac{\frac{23-64}{6}}{\frac{245}{9}\cdot\frac{16}{49}}+\frac{123}{20}=\frac{\frac{-41}{6}}{\frac{10}{9}}+\frac{123}{20}=-\frac{41\cdot 9}{6\cdot 10}+\frac{123}{20}=-\frac{123}{20}+\frac{123}{20}=0.$$

*Ответ*: 0.

8. Вычислите: $3\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{10}+5}+\dfrac{5}{\sqrt{10}-2}-\dfrac{7}{\sqrt{10}}\right).$

*Решение*.

$$3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right)=3\cdot\left(\frac{2(\sqrt{10}-5)}{10-25}+\frac{5(\sqrt{10}+2)}{10-4}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)=$$

$$= 3\cdot\left(\frac{2(\sqrt{10}-5)}{-15}+\frac{5(\sqrt{10}+2)}{6}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right) =$$

$$= 3\cdot\frac{-8(\sqrt{10}-5)+50(\sqrt{10}+2)-42\sqrt{10}}{60} =$$

$$= 3\cdot\frac{-8\sqrt{10}+40+50\sqrt{10}+100-42\sqrt{10}}{60} = \frac{140}{20} = 7.$$

*Ответ*: 7.

9. Вычислите: $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right)^{-6}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{-2}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{2}}$.

*Решение*.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right)^{-6}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{-2}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{2}} =$$

$$= (-\sqrt{3})^{2}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)+\sqrt{10}\cdot\left|3-\sqrt{10}\right| = 9-3\sqrt{10}+10-3\sqrt{10} = 19-6\sqrt{10}.$$

*Ответ*: $19-6\sqrt{10}$.

10. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\left(\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(3^{1/4}-\left(\sqrt{5}\right)^{1/2}\right)}\right)^{1/3}$.

*Решение*.

$$\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\left(\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(3^{1/4}-\left(\sqrt{5}\right)^{1/2}\right)}\right)^{1/3} = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{15}+5}}{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{5}\right)}\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)^{1/3} = -\sqrt[6]{3}.$$

*Ответ*: $-\sqrt[6]{3}$.

11. Вычислите: $\sqrt[4]{2^5\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{1/2}}-3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$.

*Решение*:

$$\sqrt[4]{2^5\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{1/2}}-3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^{17/3}}+\sqrt[4]{2^{17/3}}-3\cdot\sqrt[3]{2^{5/4}}=$$
$$2^{17/12}+2^{17/12}-3\cdot 2^{5/12}=2^{5/12}(2+2-3)=2^{5/12}=\sqrt[12]{32}.$$

*Ответ*: $\sqrt[12]{32}$.

12. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\cdot\left((x+y)^2-xy\right).$$

*Решение*.

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\cdot\left((x+y)^2-xy\right)=$$
$$\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)+\frac{x-y}{xy}(x^2+xy+y^2)=$$
$$=\frac{x^3+y^3}{xy}+\frac{x^3-y^3}{xy}=\frac{2x^3}{xy}=\frac{2x^2}{y}.$$

*Ответ*: $\frac{2x^2}{y}$.

13. Упростите выражение:

$$(a^{-2/3}-b^{-2/3})\cdot ab\cdot(a^{1/3}-b^{1/3})^{-1}+(ab^2)^{1/3}+(a^2b)^{1/3}.$$

*Решение*.

$$(a^{-2/3}-b^{-2/3})\cdot ab\cdot(a^{1/3}-b^{1/3})^{-1}+(ab^2)^{1/3}+(a^2b)^{1/3}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}ab+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}ab+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=0.$$

*Ответ*: 0.

14. Докажите тождество:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{2x(x-1)}.$$

*Решение*.

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x+1+x+1}{\sqrt{x^2-1}}:(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-x^2+2x\sqrt{x^2-1}-x^2+1)=$$

$$=\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{4x\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+1}{2x(x^2-1)}=\frac{1}{2x(x-1)}.$$

### *1.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

1. Найдите отношение НОК и НОД чисел 504 и 540.

   *Ответ*: 210.

2. Найдите отношение НОК и НОД чисел 12600 и 8820.

   *Ответ*: 70.

3. Разделите число 434 на части обратно пропорционально числам 2; 3; 5.

   *Ответ*: 210; 140; 84.

4. Разбейте число 252 на три части так, чтобы частные от деления первой части на 3, второй – на 4, третьей – на 5 были равны.

   *Ответ*: 63; 84; 105.

5. Найдите число, 5% которого составляет 23% числа 15,5.

   *Ответ*: 71,3.

6. Найдите число *a*, если известно, что число (*a*+6) составляет от него 120%.

   *Ответ*: 30.

7. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 20%, а другое уменьшить на 40%?

   *Ответ*: 38%.

8. Вычислите: $\dfrac{1\frac{23}{30}-1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}{1\frac{1}{5}:\left(\dfrac{17}{40}+0{,}6-0{,}0005\right)}$.

   *Ответ*: –0,3415.

9. Вычислите: $\left(\dfrac{(42\cdot 3\frac{6}{7}+3{,}3:0{,}03):\frac{1}{15}}{(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8):0{,}03}\right)^{-1}-\dfrac{11}{272}$.

   *Ответ*: 0.

10. Вычислите: $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$.

*Ответ*: 1.

11. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}12\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-5}\right)^{-2}\cdot(1-\sqrt{2})^3}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}\cdot(1-\sqrt{2})^2}$ .

*Ответ*: $3-2\sqrt{2}$ .

12. Вычислите: $\left(\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-2\sqrt{14}}}{\left(\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{7}\right)\cdot\left(2^{1/4}-(\sqrt{7})^{1/2}\right)}\right)^{1/3}$ .

*Ответ*: $-\sqrt[6]{5}$ .

13. Вычислите: $\sqrt[4]{3^5\cdot\sqrt[3]{9}}+\sqrt[4]{729\cdot\sqrt[3]{1/3}}-5\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3}}$ .

*Ответ*: $\sqrt[12]{243}$ .

14. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^3}-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3}-1\right)$.

*Ответ*: $x$.

14. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\cdot(x+\sqrt{x})$ .

*Ответ*: $x$–1.

15. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{(m+n)^2}\cdot\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot m^2n^2.$$

*Ответ*: 1.

16. Упростите выражение:

$$((\sqrt{a}-\sqrt{a-b})^{-1}+(\sqrt{a}+\sqrt{a+b})^{-1}):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right).$$

*Ответ*: $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b}$.

17. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{x\sqrt{xy}}{x+y}$ .

*Ответ*: $\dfrac{2x}{x-y}$.

18. Докажите тождество: $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}=0$ .

## *1.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ*

**Обыкновенные и десятичные дроби** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}$ |
| 2 | Вычислите $\dfrac{\left(\frac{3}{65}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(21-1\frac{1}{4}\right):\frac{5}{2}}$ |
| 3 | Вычислите $4\left(\frac{17}{5}-\frac{47}{40}\right)+12\frac{1}{2}:\frac{25}{4}+3$ |
| 4 | Вычислите $\dfrac{\left(1{,}8+\frac{19}{20}\right):0{,}5}{\frac{7}{40}:0{,}35+\frac{7}{3}:\frac{217}{31}}$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{0{,}64-\frac{1}{25}}{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}$ |
| 6 | Вычислите $\left(26{,}7-13\frac{1}{5}\right):1{,}8+6{,}125\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)+22\cdot\frac{3}{5{,}5}$ |
| 7 | Вычислите $\dfrac{\left(5\frac{4}{15}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\frac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}$ |
| 8 | Представьте в виде десятичных дробей<br>а) $\frac{12}{11}$, б) $\frac{201}{98}$, в) $\frac{281}{66}$. |
| 9 | Представьте в виде обыкновенных дробей<br>а) $0,(51)$, б) $25,(32)$, в) $28,(15)$ |
| 10 | Вычислите $\left(\dfrac{\left(0,(21)+\frac{31}{44}\right)\cdot 1{,}44-1,(3)}{\frac{1}{40}}+0{,}4\right):\left(1\frac{1}{15}-0{,}9\right)$ |

**Обыкновенные и десятичные дроби** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $\dfrac{2\frac{5}{18}-5\frac{1}{12}+1\frac{2}{9}}{3\frac{4}{5}}$ |
| 2 | Вычислите $\dfrac{13\cdot 86}{450}:\dfrac{13}{50}+\dfrac{57-14}{27}-\dfrac{10}{9}$ |
| 3 | Вычислите $\left(\dfrac{92}{85}+\dfrac{104}{17}\right)\cdot\dfrac{5}{18}+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{6}\right)-\dfrac{5}{2}$ |
| 4 | Вычислите $2-\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{1{,}01\cdot 0{,}2-0{,}004}{\left(\frac{95}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 18\cdot\frac{1}{8}}$ |
| 6 | Вычислите $\left(3\dfrac{4}{9}:\left(2\dfrac{1}{36}-1\dfrac{20}{27}\right)\right):(2{,}08:10{,}4+2{,}5\cdot 0{,}4)$ |
| 7 | Вычислите $\dfrac{1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}-1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$ |
| 8 | Представьте в виде десятичных дробей<br>а) $\dfrac{7}{9}$, б) $\dfrac{5}{27}$, в) $\dfrac{67}{22}$ |
| 9 | Представьте в виде обыкновенных дробей<br>а) $2,(91)$, б) $0,42(5)$, в) $2,(67)$. |
| 10 | Вычислите $\left(2\dfrac{1}{3}+3{,}5\right):\left(-4\dfrac{1}{6}+3{,}25\right)+2,(36)$ |

**Обыкновенные и десятичные дроби** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $\dfrac{\left(\dfrac{29}{35}-\dfrac{3}{7}\right)\cdot 49}{\left(\dfrac{45}{8}-\dfrac{47}{18}\right)\cdot\dfrac{36}{31}}$ |
| 2 | Вычислите $\left(\dfrac{14}{15}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{10}\right)\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}$ |
| 3 | Вычислите $\dfrac{217}{31}:1\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{7}{2}:\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{17}{5}:\dfrac{17}{18}$ |
| 4 | Вычислите $\dfrac{3{,}9\cdot 0{,}24:\dfrac{5}{16}}{\left(4{,}06-2\dfrac{1}{2}\right)\cdot 0{,}8-4\dfrac{4}{5}}$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{\left(1{,}2:36+\dfrac{6}{5}\cdot 0{,}25\right)\cdot 9}{\left(\dfrac{128}{45}-\dfrac{1}{15}\right):\dfrac{125}{9}}$ |
| 6 | Вычислите $\left(\dfrac{1}{2}+0{,}8-1\dfrac{1}{2}:2{,}5\right):\left(3+4\dfrac{3}{25}-0{,}12\right)$ |
| 7 | Вычислите $\left(\dfrac{\left(6-4\dfrac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\dfrac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\dfrac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot 1\dfrac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{1}{80}}\right):2\dfrac{1}{20}$ |
| 8 | Представьте в виде десятичных дробей<br>а) $\dfrac{31}{27}$, б) $\dfrac{13}{90}$, в) $\dfrac{7}{33}$ |
| 9 | Представьте в виде обыкновенных дробей<br>а) $0{,}55(3)$, б) $0{,}2(1)$, в) $0{,}(88)$ |
| 10 | Вычислите $\dfrac{\left(13\dfrac{3}{4}+9\dfrac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\dfrac{1}{2}\right)\cdot 0{,}(5)}+\dfrac{\left(6{,}8+3\dfrac{3}{5}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}}{\left(3{,}(6)-3\dfrac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\dfrac{1}{6}$ |

**Обыкновенные и десятичные дроби** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot 3\frac{1}{5}+4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}$ |
| 2 | Вычислите $\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{99}{49}+\frac{7}{6}$ |
| 3 | Вычислите $\left(2\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-1\frac{7}{8}\right):\frac{1}{8}-\frac{1}{4}$ |
| 4 | Вычислите $\left(-6\frac{2}{15}-1\frac{1}{12}+5\frac{1}{6}\right):0{,}5+0{,}5$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{\left(\frac{29}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot 0{,}6}{\left(\frac{41}{18}-\frac{7}{36}\right)\cdot\frac{1}{65}+0{,}25}$ |
| 6 | Вычислите<br>$14\frac{2}{5}:\left(7\frac{1}{12}+2{,}15-5\frac{19}{30}\right)-\left(6:3\frac{1}{13}\right)\left(8\frac{8}{15}:8\right)$ |
| 7 | Вычислите $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)34\frac{2}{5}}\cdot 90$ |
| 8 | Представьте в виде десятичных дробей<br>а) $\frac{133}{45}$, б) $\frac{7}{11}$, в) $\frac{37}{30}$. |
| 9 | Представьте в виде обыкновенных дробей<br>а) $4{,}4(3)$, б) $0{,}(7)$, в) $1{,}(09)$ |
| 10 | Вычислите<br>$\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot(19{,}2:3{,}(5))-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18{,}(6)\cdot 11}-\frac{1}{18}$ |

**Обыкновенные и десятичные дроби** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | $-2{,}4$ | 5,6 | 2,77 |
| 2 | $\frac{4805}{2054}$ | 38 | 3,7 | 2 |
| 3 | 13,9 | 1 | $-0{,}7$ | 6 |
| 4 | 0,6 | $-14$ | 0,5 | $-3{,}6$ |
| 5 | 0,75 | 0,099 | 15 | 2 |
| 6 | 20 | 10 | 0,1 | 1,92 |
| 7 | 1 | 12 | 10 | 9 |
| 8 | *а*) 1,(09)<br>*б*) 1,0(15)<br>*в*) 4,2(57) | *а*) 0,(7)<br>*б*) 0,(185)<br>*в*) 3,0(45) | *а*) 1,(148)<br>*б*) 0,1(4)<br>*в*) 0,(21) | *а*) 2,9(5)<br>*б*) 0,(63)<br>*в*) 1,2(3) |
| 9 | *а*) $\frac{51}{99}$<br>*б*) $\frac{2507}{99}$<br>*в*) $\frac{923}{33}$ | *а*) $\frac{289}{99}$<br>*б*) $\frac{383}{900}$<br>*в*) $\frac{205}{99}$ | *а*) $\frac{166}{300}$<br>*б*) $\frac{19}{90}$<br>*в*) $\frac{8}{9}$ | *а*) $\frac{130}{30}$<br>*б*) $\frac{7}{9}$<br>*в*) $\frac{12}{11}$ |
| 10 | $-\frac{4}{5}$ | $-4$ | 1 | 10 |

**Степени и радикалы** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $0{,}3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}-0{,}1$ |
| 2 | Вычислите $\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}\right):\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)$ |
| 3 | Вычислите $\left(\left(6\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+(0{,}25)^{-1}\right)\cdot(-0{,}5)^{3}$ |
| 4 | Вычислите $\dfrac{\left(\frac{1}{24}\right)^{3}\cdot 27^{-2}\left(\frac{1}{12}\right)^{-9}-80}{0{,}75^{-2}}$ |
| 5 | Вычислите $\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{68\cdot(32^{2}-15^{2})}{47}}}$ |
| 6 | Вычислите $\dfrac{(7\sqrt{27}-7\sqrt{8})\cdot(27^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{2}})}{27^{2}-64}$ |
| 7 | Вычислите $\sqrt[3]{0{,}12\left(\frac{\sqrt{3}}{-5}\right)^{-2}\cdot(1-\sqrt{2})^{3}}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}\cdot(1-\sqrt{2})^{2}}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3)}{2-\sqrt{3}}$ |
| 9 | Вычислите $(9\sqrt{2}+3\sqrt{5}-6\sqrt{3}-\sqrt{30})\cdot(9\sqrt{2}-3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{30})$ |
| 10 | Вычислите $(5-3\sqrt{2})\sqrt{43+5\sqrt{72}}$ |

**Степени и радикалы** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $0{,}1\cdot\sqrt{20}:\sqrt{45}-2\frac{17}{30}$ |
| 2 | Вычислите $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot 2^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right):(3^0+2^{-2})$ |
| 3 | Вычислите $\left(33(4^{\frac{1}{4}})^{-12}+\frac{(-2)^{-5}}{2}\right)^{-3}$ |
| 4 | Вычислите $\frac{\left(\frac{1}{15}\right)^3\left(\frac{1}{75}\right)^{-4}\cdot\frac{9}{125}+0{,}2^{-2}}{17{,}5}$ |
| 5 | Вычислите $\sqrt{\frac{75}{4}\sqrt{\frac{228}{66^2-48^2}}}$ |
| 6 | Вычислите $\frac{(3\sqrt[3]{7}+3\sqrt[3]{3})(49^{\frac{1}{3}}-21^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}})}{(\sqrt{15}-\sqrt{10})^2(2\sqrt{15}+2\sqrt{10})^2}$ |
| 7 | Вычислите $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{6}}{-6}\right)^{-6}\cdot(6-\sqrt{37})^3}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{37}}{37}\right)^{-2}\cdot(6-\sqrt{37})^2}$ |
| 8 | Вычислите $\frac{(\sqrt{19}+\sqrt{2})(\sqrt{38}+\sqrt{57}-\sqrt{6}-2)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ |
| 9 | Вычислите $(\sqrt{65}+\sqrt{14}-\sqrt{91}-\sqrt{10})(\sqrt{65}+\sqrt{14}+\sqrt{91}+\sqrt{10})$ |
| 10 | Вычислите $(\sqrt{28}-\sqrt{12})\sqrt{10+\sqrt{84}}$ |

**Степени и радикалы** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $-\sqrt[5]{0{,}0016}\cdot\sqrt[5]{-0{,}02}$ |
| 2 | Вычислите $\left(\left(\dfrac{4^0}{5}\right)-(0{,}1)^{-1}\right):\left(\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right)$ |
| 3 | Вычислите $2\cdot(-3)^{-2}+\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}+(-3)^0$ |
| 4 | Вычислите $\dfrac{\left(\dfrac{1}{18}\right)^{5}\cdot 64\cdot\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-4}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}$ |
| 5 | Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{12}{15}\sqrt{\dfrac{244}{15(38^2-23^2)}}}$ |
| 6 | Вычислите $\dfrac{13{,}75-1{,}2}{(\sqrt{69}-\sqrt{3})(69^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}})}$ |
| 7 | Вычислите $\sqrt[3]{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{-8}\right)^{-6}\cdot(8-\sqrt{65})^3}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{65}}{65}\right)^{-2}\cdot(8-\sqrt{65})^2}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{15})(7\sqrt{2}+\sqrt{210}+\sqrt{35}+5\sqrt{3})}{\sqrt{14}+\sqrt{5}}$ |
| 9 | Вычислите $(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6)\cdot(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6)$ |
| 10 | Вычислите $(\sqrt{3}-\sqrt{17})\sqrt{\sqrt{204}+20}$ |

**Степени и радикалы** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Вычислите $0{,}1\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027}$ |
| 2 | Вычислите $\left(2^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right):\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{0}-12\cdot 3^{-3}\right)\cdot 18$ |
| 3 | Вычислите $(2^{-\frac{1}{2}})^{-6}-(0{,}125)^{-1}+(2^{\frac{1}{2}})^{0}$ |
| 4 | Вычислите $\dfrac{\left(\frac{1}{12}\right)^{2}\cdot 4^{8}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^{2}-0{,}1^{-2}}{15-0{,}5^{-1}}$ |
| 5 | Вычислите $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31}{83}(57^{2}-26^{2})}}$ |
| 6 | Вычислите $\dfrac{(9^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}})(\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49})}{\frac{14}{3}-\frac{1}{2}}$ |
| 7 | Вычислите<br>$\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{-2}\right)^{-12}\cdot(4-\sqrt{17})^{3}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^{-2}\cdot(4-\sqrt{17})^{2}}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{(\sqrt{14}+1)(7\sqrt{2}-\sqrt{7}+2\sqrt{14}-2)}{\sqrt{28}+4}$ |
| 9 | Вычислите<br>$(2\sqrt{66}-\sqrt{253}+12\sqrt{2}-2\sqrt{69})(2\sqrt{66}+\sqrt{253}-$<br>$-12\sqrt{2}-2\sqrt{69})$ |
| 10 | Вычислите $(4\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{50+\sqrt{384}}$ |

**Степени и радикалы** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,9 | – 2,5 | 0,2 | 0,15 |
| 2 | 1 | 2 | 1,5 | 29,65 |
| 3 | – 5 | 8 | 4 | 1 |
| 4 | 243 | 40 | 24 | – 2,8 |
| 5 | 6 | 2,5 | 0,4 | 11 |
| 6 | 0,2 | 0,3 | 0,25 | 3,84 |
| 7 | –1 | –1 | 0,004 | 0,015 |
| 8 | 12 | 17 | – 8 | 6,5 |
| 9 | 39 | – 22 | – 5 | – 1 |
| 10 | 7 | 8 | – 14 | 46 |

**Многочлены** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Выполните действия $(x+5)(x^2-5x+25)$ |
| 2 | Разложите на множители $135x^8y^{12}+90x^4y^{10}-36x^{16}y^6$ |
| 3 | Разложите на множители $(2x+1)^3-27$ |
| 4 | Разложите на множители $4y^2-(x^2-y^2-1)$ |
| 5 | Выделите полный квадрат $x^2-2x+5$ |
| 6 | Выделите полный квадрат $3x^2+2x+4$ |
| 7 | Выполните действия $(x^3+3x^2+4x+2):(x+1)$ |
| 8 | Найдите значение коэффициента при $x^2$ $(x-2)(2-3x)(2x+5)+2(x^2-1)$ |
| 9 | Найдите все значения $a$, при которых равенство $\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$ верно для всех $x$ |
| 10 | Найдите все значения $a$ и $b$, при которых равенство $(3x+4)^2=(3b-4a)x^2+\frac{12}{b}(17-a)x+16$ верно для всех $x$ |

**Многочлены** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Выполните действия $(x+y)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)$ |
| 2 | Разложите на множители $-56x^{10}y^7+42x^{16}y^5-70x^{20}y^4$ |
| 3 | Разложите на множители $(2x-3)^3+1$ |
| 4 | Разложите на множители $(y^2-y-3xy+3x)^2-(3xy-y+3x-9x^2)^2$ |
| 5 | Выделите полный квадрат $4x^2+2x-1$ |
| 6 | Выделите полный квадрат $x^2+3x+4$ |
| 7 | Выполните действия $(x^4-25x^2+60x-36):(x-1)$ |
| 8 | Найдите значение коэффициента при $x^2$ $\frac{1}{2}x(x-5)(2x-1)+x^3(x^2-4)$ |
| 9 | Найдите все значения $a$, при которых равенство $\frac{a(2x-7)-8x-35}{5+a}=\frac{x-21}{3}$ верно для всех $x$ |
| 10 | Найдите все значения $a$ и $b$, при которых равенство $2(x+10(ax^2+1))=7x^2+bx^2+5ax+3bx+10$ верно для всех $x$ |

**Многочлены** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Выполните действия<br>$(x+2)(x^2-2x+4)-(x^2-3x)(x+3)$ |
| 2 | Разложите на множители $195x^5y^6-91x^6y^5+221x^{10}y^3$ |
| 3 | Разложите на множители $x^3-4x^2+10x-125$ |
| 4 | Разложите на множители<br>$(2y^2-3y^2x+3yx^2-2x^3)^2-9y^2x^2(y-x)^2$ |
| 5 | Выделите полный квадрат $3x^2+6x-8$ |
| 6 | Выделите полный квадрат $2x^2+4x-5$ |
| 7 | Выполните действия $(9x^4-30x^3+25x^2-4):(x-1)$ |
| 8 | Найдите значение коэффициента при $x^2$<br>$(x-1)(2x-1)+(x-1)\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ |
| 9 | Найдите все значения $a$, при которых равенство $\frac{3x+4a+8}{a+2}=\left(\frac{2}{a+2}-1\right)x+4-\frac{x}{3}$ верно для всех $x$ |
| 10 | Найдите все значения $a$ и $b$, при которых равенство $(9x-1)(2x+3)=-3+12x-(2a-5b)x+(4a+b)x^2$ верно для всех $x$ |

**Многочлены** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Выполните действия $(x+2y-2(x+y))\cdot(x^2-(x^2+y))$ |
| 2 | Разложите на множители $132x^9y^7+165x^8y^5-99x^5y^4$ |
| 3 | Разложите на множители $(2x+1)^3-8$ |
| 4 | Разложите на множители $(x+y+1)^3-(x^3+y^3+1)$ |
| 5 | Выделите полный квадрат $x^2+\frac{1}{2}x+3$ |
| 6 | Выделите полный квадрат $\frac{1}{2}x^2+5x-8$ |
| 7 | Выполните действия $(x^4-10x^3+90x-81):(x-3)$ |
| 8 | Найдите значение коэффициента при $x^2$ $(x^2+2x+1)+(2x-1)(x^3+2x+5)$ |
| 9 | Найдите все значения $a$, при которых равенство $x\left(4+\frac{14}{a+1}\right)=\frac{10x+8a+8}{a-1}-8$ верно для всех $x$ |
| 10 | Найдите все значения $a$ и $b$, при которых равенство $(2x+1)(2x+5)+5x=\frac{(8-b)x^2}{a}+3bx-2ax+5$ верно для всех $x$ |

**Многочлены** **Ответы**

| № вар. / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^3+125$ | $xy(x+y)$ | $9x+8$ | $xy$ |
| 2 | $9x^8y^6(15y^4+$ $+10x^3y^4-4x^8)$ | $-14x^{10}y^4(4y^3-$ $-3yx^6+5x^{10})$ | $13x^5y^4(15y^3-$ $-7xy^2+17x^5)$ | $33x^5y^4$ $(4x^4y^3+$ $+5x^3y-3)$ |
| 3 | $2(x-1)(4x^2+$ $+10x+13)$ | $2(x-1)(4x^2-$ $-14x+1)$ | $(x-5)(x^2+x+$ $+25)$ | $(2x-1)$ $(4x^2+8x+$ |
| 4 | $(x+y+1)/(x+y-$ $\cdot(x-y+1)\cdot(y-x$ | $(y-3x)^3(y+3x-2)$ | $4(y-x)^4(y^2+xy+$ $+x^2)$ | $3(x+y)(x+$ $\cdot(y+1)$ |
| 5 | $(x-1)^2+4$ | $(2x+\frac{1}{2})^2\frac{5}{4}$ | $3(x+1)^2-11$ | $(x+\frac{1}{4})^2$ $+\frac{11}{4}$ |
| 6 | $3(x+\frac{1}{3})^2+3\frac{2}{3}$ | $(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$ | $2(x+1)^2-7$ | $\frac{1}{2}(x+5)^2$ $-\frac{41}{2}$ |
| 7 | $x^2+2x+2$ | $x^3+x^2-24x+36$ | $9x^3-21x^2+4x+4$ | $x^3-7x^2$ $-21x+27$ |
| 8 | 3 | $-5,5$ | 2,5 | 5 |
| 9 | 0,125 | 5,8 | $-2,75$ | 5 |
| 10 | (3;7) | (1,2;5) | (3,5;4) | (0,5;6) |

**Рациональные дроби** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2-b^2}$ |
| 2 | Выполните действия $\dfrac{6b^2-b-2}{3b-2}-2b$ |
| 3 | Выполните действия $\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}$ |
| 4 | Выполните действия $\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\dfrac{a}{a-b}$ |
| 5 | Выполните действия $\left(\dfrac{1}{2+4m}-\dfrac{1-m}{8m^3+1}:\dfrac{1-2m}{4m^2-2m+1}\right)\cdot\left(\dfrac{4m+2}{2m-1}\right)$ |
| 6 | Упростите выражение $\left(\left(\dfrac{(a+5)^2}{a}\right)-4\right)\left(\dfrac{(a+5)^2-5a}{2a}\right):\left(\dfrac{a^3-125}{a}\right)$ и вычислите его при $a=\dfrac{25}{3}$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\dfrac{(m+n)^2+2n^2}{m^3-n^3}-\dfrac{1}{m-n}+\dfrac{m+n}{m^2+mn+n^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)$ и вычислите его при $m=16$ и $n=\dfrac{10}{176}$ |
| 8 | Выделите целую часть дроби $\dfrac{3x^5+2x}{1-x^2}$ |
| 9 | Найдите числа $A,B,C$, при которых равенство $\dfrac{1}{(x^2+x+1)x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ справедливо при любых допустимых $x$ |
| 10 | Укажите наименьшее целое число $K$, при котором дробь $\dfrac{21K^2-11K+24}{7K+1}$ является целым числом |

**Рациональные дроби** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{b^2-a^2}$ |
| 2 | Выполните действия $\frac{a+1}{a^2-a-2}-\frac{1}{a-2}$ |
| 3 | Выполните действия $\frac{a}{a-b}+\frac{a^2b+ab^2}{b^3-a^3}$ |
| 4 | Выполните действия $\frac{1}{x^2+3xy}+\frac{2}{9y^2-x^2}+\frac{1}{2x-6y}$ |
| 5 | Выполните действия $\left(\frac{x^2-2x+4}{4x^2-1}:\frac{x^3+8}{2x^2+x}-\frac{x+2}{2x^2-x}\right):\frac{4}{x^2+2x}-\frac{x+4}{3-6x}$ |
| 6 | Упростите выражение $\frac{a^3+27}{(a+3)^2}:(a^2-9)+\frac{3}{a+3}+\frac{3a-18}{(a^2-9)(a+3)}$ и вычислите его при $a=16$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{n}{m}\right):\left(\frac{m}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$ и вычислите его при $m=97$ и $n=41$ |
| 8 | Выделите целую часть дроби $\frac{x-x^7}{x^5+1}$ |
| 9 | Найдите числа $A,B,C$, при которых равенство $\frac{2x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ справедливо при любых допустимых $x$ |
| 10 | Укажите наибольшее целое число $K$, при котором дробь $\frac{12K^2+5K+6}{4K+3}$ является целым числом |

**Рациональные дроби** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\frac{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}{a+b}$ |
| 2 | Выполните действия $\frac{b^2+2b-3}{b-1}$ |
| 3 | Выполните действия $\frac{1}{x^2+3xy}+\frac{1}{9y^2-x^2}$ |
| 4 | Выполните действия $\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}$ |
| 5 | Выполните действия $\frac{a^3-27}{a^2+3a+9}+\frac{a^2-9}{a+3}-\frac{2}{(a-3)^{-1}}$ |
| 6 | Упростите выражение $\left(\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{6a}{a^3-8}+\frac{2a}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}\right)-\frac{4a+4}{a-2}$ и вычислите его при $a=19{,}25$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2b}{a^2-b^2}\right)$ и вычислите его при $a=13$ и $b=78$ |
| 8 | Выделите целую часть дроби $\frac{x^6+2x}{1-x}$ |
| 9 | Найдите числа $A, B, C$, при которых равенство $\frac{x-2}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$ справедливо при любых допустимых $x$ |
| 10 | Укажите наименьшее целое число $K$, при котором дробь $\frac{15K^2-11K+29}{5K-2}$ является целым числом |

**Рациональные дроби** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{a-b}$ |
| 2 | Выполните действия $\dfrac{a^2+4a+2}{a}-a-\dfrac{2}{a}$ |
| 3 | Выполните действия $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$ |
| 4 | Выполните действия $\dfrac{x-2}{x^2+2x}+\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{4x}{x^2-4}$ |
| 5 | Выполните действие $\dfrac{3n+10}{n+4}+\left(\dfrac{n-4}{n+6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{n+21}{16-8n+n^2}-\dfrac{n+3}{16-n^2}\right)$ |
| 6 | Упростите выражение $\left(\dfrac{4}{a^2+a}-\dfrac{2}{1-a^2}-\dfrac{1}{a^2-a}\right):\left(\dfrac{2a-1}{a^2+a}\right)$ и вычислите его при $a$ = 10,5 |
| 7 | Упростите выражение $\left((a^2+b^2+ab)\left(b-\dfrac{b^2}{a+b}\right)\right):\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)$ и вычислите его при $a=15$ и $b=17$ |
| 8 | Выделите целую часть дроби $\dfrac{1-2x^6+x}{x^3-x}$ |
| 9 | Найдите числа $A,B,C$, при которых равенство $\dfrac{x}{(x+1)^2(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x11}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ справедливо при любых допустимых $x$ |
| 10 | Укажите наименьшее целое число $K$, при котором дробь $\dfrac{6K^2+K-27}{3K+2}$ является целым числом |

**Рациональные дроби** **Ответы**

| № вар. / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{(a-b)^2}{a+b}$ | $\dfrac{(a+b)^2}{b-a}$ | $a^3-b^3$ | $a^3+b^3$ |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 4 |
| 3 | $\dfrac{8}{x^2-4}$ | $\dfrac{a^3}{a^3-b^3}$ | $\dfrac{3y}{x(9y^2-2x)}$ | $\dfrac{1}{x+y}$ |
| 4 | $\dfrac{(b-a)^2}{a^2+ab+b^2}$ | $\dfrac{x-2}{2x(x-3y)}$ | $\dfrac{(a-5)^2}{a^2+5a+25}$ | $-\dfrac{2}{x}$ |
| 5 | $\dfrac{1}{(2m-1)^2}$ | $-\dfrac{1}{3}$ | $a$ | 3 |
| 6 | 2,6 | 0,2 | 19,25 | 0,25 |
| 7 | 1,1 | 138 | 6 | 255 |
| 8 | $-3x^2-3x+\dfrac{5x}{-x^2+1}$ | $-x^2+\dfrac{x^2+x}{x^5+1}$ | $-x^5-x^4-x^3-$ $-x^2-x-3+\dfrac{3}{-x+1}$ | $-2x^2-2x-$ $-\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-x}$ |
| 9 | 1;–1;–1 | $-\dfrac{3}{5};\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}$ | $-1;3;-2$ | $-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}$ |
| 10 | –2 | 0 | –5 | –9 |

**Степени и радикалы** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\dfrac{(\sqrt{a-b})^{-1}+(\sqrt{a+b})^{-1}}{(\sqrt{a-b})^{-1}-(\sqrt{a+b})^{-1}}-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ |
| 2 | Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[4]{n}}+\sqrt[4]{n}$ |
| 3 | Упросите выражение $\dfrac{a\sqrt[3]{a}-2a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}-1}:\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}\right)^{-1}$ |
| 4 | Найдите $\sqrt{25-x}+\sqrt{8-x}$ если $\sqrt{25-x}-\sqrt{8-x}=1$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, если $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ |
| 6 | Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{a+b}$, $a>0,\ b>0.$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}}{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{(a-b)^{-1}}{b^{-\frac{1}{2}}}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2}$ при $a=\sqrt[3]{3},\ b=\sqrt{0{,}008}$ |
| 9 | Упростите выражение $\left(\dfrac{4a(\sqrt[3]{a}+\sqrt{2})}{a^2-8}\right):\dfrac{1}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{a^2}+4)}$ и вычислите его при $a=7$ |
| 10 | Упростите выражение $\dfrac{(x-2)-\lvert x\rvert}{\sqrt{1-x^2}}$ |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\left(\frac{a+b^2-2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}-\frac{a+b^2+2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}$ |
| 2 | Упростите выражение $\frac{3\sqrt[3]{3n^2}-\sqrt{m}}{\sqrt[3]{9n}-\sqrt[4]{m}}-\sqrt[4]{m}$ |
| 3 | Упросите выражение $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x}-1}\right)^{-1}$ |
| 4 | Найдите $\sqrt{21-t}+\sqrt{5-t}$, если $\sqrt{21-t}-\sqrt{5-t}=2$ |
| 5 | Вычислите $\left(\frac{x+2}{x-2}+\frac{x+2\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}\right):\frac{x}{2}$, если $x=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ |
| 6 | Упростите выражение $(x+2\sqrt{2x-4})-\frac{1}{2}+(x-2\sqrt{2x-4})-\frac{1}{2}$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{2})^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{t}}\right)$ |
| 8 | Вычислите $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{(1+\sqrt{\frac{b}{a}})^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}}$ при $a=1{,}21$ |
| 9 | Упростите выражение $\frac{a-\sqrt[3]{81a^2}+3\sqrt[3]{9a}-3}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})^2}:\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{9}}$ и вычислите его при $a=27$ |
| 10 | Упростите выражение $\frac{\lvert 2-x\rvert-x}{\sqrt{x}+1}$ |

**Рациональные дроби** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{3/2}-ab^{1/2}}-\dfrac{a-b}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1}$ |
| 2 | Упростите выражение $\dfrac{a^{0,6}-a^{-0,6}}{a^{0,4}+a^{-0,4}+1}+a^{-0,2}$ |
| 3 | Упросите выражение $\left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\dfrac{1}{x+y+\sqrt{xy}}$ |
| 4 | Найдите $\sqrt{22-a}+\sqrt{7-a}$, если $\sqrt{22-a}-\sqrt{7-a}=2$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{(1-x)(x+2)}{x^2(x+1)^2}$, если $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ |
| 6 | Упростите выражение<br>$\sqrt{a-1+2\sqrt{a-2}}+\sqrt{a-1-2\sqrt{a-2}}$ |
| 7 | Упростите выражение<br>$\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{\sqrt{(1+\frac{b}{a})^2-\frac{4b+1}{a}}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}$<br>при $a=2{,}25$ |
| 9 | Упростите выражение<br>$\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{32a}+\sqrt[3]{16}}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{4})^3(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4a}+\sqrt[3]{16})}$<br>и вычислите его при $a=16$ |
| 10 | Упростите выражение $\dfrac{2(x+1)}{\lvert x\rvert+(x+2)}$ |

**Рациональные дроби** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Упростите выражение $\dfrac{a^{-2}+a}{(\sqrt{a})^{-1}+\sqrt{a}}\cdot(1-a+a^2)^{-1}$ |
| 2 | Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$ |
| 3 | Упросите выражение $\dfrac{x+y+3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{xy}}$ |
| 4 | Найдите $\sqrt{17-t}+\sqrt{6-t}$, если $\sqrt{17-t}-\sqrt{6-t}=3$ |
| 5 | Вычислите $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b}$, если $x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$ |
| 6 | Упростите выражение $\dfrac{2a+1-\sqrt{(a-2)^2}}{3a^2+8a-3}$ |
| 7 | Упростите выражение $\left(\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2-\sqrt[4]{16ab}}{a-b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ |
| 8 | Вычислите $\dfrac{\sqrt{a^2+b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\dfrac{a^3}{b}-2a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{ab}}}$ при $a=4{,}8$, $b=1{,}2$ |
| 9 | Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a^3}-2a-4\sqrt{a}+8}{\sqrt{a^3}-6a+12\sqrt{a}-8}-\dfrac{4}{\sqrt{a}+2}$ и вычислите его при $a=14$ |
| 10 | Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{(x^2-1)+\lvert x+1\rvert}}{\sqrt{x+1}}$ |

**Рациональные дроби** **Ответы**

| № задания \ № варианта | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{a}{b}$ | $-2\frac{a^2}{b}$ |
| 2 | $\sqrt[3]{m}$ | $\sqrt[3]{9n}$ |
| 3 | $a$ | $-1$ |
| 4 | 17 | 8 |
| 5 | $\sqrt{2}-1$ | $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 6 | $\begin{cases} 1, \text{ при } b \geq a \\ \frac{3a-b}{a+b}, \text{ при } a > b \end{cases}$ | $\begin{cases} \frac{2\sqrt{x-2}}{x-4}, \ x \in (4,+\infty) \\ \frac{-2\sqrt{2}}{x-4}, \ x \in [2,4) \end{cases}$ |
| 7 | $-2\sqrt[3]{a}$ | $\frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}$ |
| 8 | 1,25 | 1,1 |
| 9 | 28 | 12 |
| 10 | $\begin{cases} -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \ x \in (1,0) \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in [0,1) \end{cases}$ | $\begin{cases} -2(\sqrt{x}+1), \ x \in [0,2) \\ -\frac{2}{\sqrt{x}-1}, \ x \in [2,+\infty) \end{cases}$ |

**Рациональные дроби** **Ответы**

| № варианта / № задания | 3 | 4 |
|---|---|---|
| 1 | $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ | $a^{-\frac{3}{2}}$ |
| 2 | $a^{\frac{1}{5}}$ | $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ |
| 3 | $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ | $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ |
| 4 | 7,5 | $\frac{11}{3}$ |
| 5 | 6 | 0 |
| 6 | $\begin{cases} 2\sqrt{a-2}, & a\in(3,+\infty) \\ 2, & a\in[2,3] \end{cases}$ | $\begin{cases} \frac{1}{3a-1}, & a\in[2,+\infty) \\ \frac{1}{a+3}, & a\in(-\infty,2) \end{cases}$ |
| 7 | $\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 8 | $\frac{4}{9}$ | 2,4 |
| 9 | 0,05 | 2,6 |
| 10 | $\begin{cases} x+1, & x\in(-\infty,0) \\ 2, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$ | $\begin{cases} \sqrt{2-x}, & x\in(-1,1) \\ \sqrt{x}, & x\in[1,+\infty) \end{cases}$ |

## *КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ 1*

### *ТЕСТ 1*

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что $\dfrac{5^4+5\cdot 3^6}{5^3+5^2\cdot 3^2}$ целое число? |
| 2 | Верно ли, что $\dfrac{1+17+17^2}{1+17^{-1}+17^{-2}}$ целое число? |
| 3 | Верно ли, что при любом $n\in \boldsymbol{N}$ $\dfrac{(5n+1)^2-36}{5}$ целое число? |
| 4 | Верно ли, что пр и любом $n\in \boldsymbol{N}$ $\dfrac{n^3+3n^2+5n+3}{3}$ целое число? |
| 5 | Верно ли, что число $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{9\cdot 10}+0{,}1$ равно 1? |
| 6 | Верно ли, что число $4+2\sqrt{3}$ является квадратом числа $1+\sqrt{3}$? |
| 7 | Верно ли, что число $11-6\sqrt{2}$ является квадратом числа $\dfrac{7}{\sqrt{2}+3}$? |
| 8 | Верно ли, что число $\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ равно 0? |
| 9 | Верно ли, что число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ равно 1? |
| 10 | Верно ли, что число $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)$ равно 1? |
| 11 | Верно ли, что $x-\sqrt{x^2}$ равно нулю для всех $x$? |
| 12 | Верно ли, что $x\sqrt{-x}-\sqrt{-x^3}$ равно нулю для всех $x$ из области определения выражения? |

| | |
|---|---|
| 13 | Верно ли, что $-1$ является корнем уравнения $\sqrt{(x-1)^2}=2$? |
| 14 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором $\frac{a^2-1}{a-1}=a-1$? |
| 15 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором $\frac{a^2-1}{-a-1}=-a-1$? |
| 16 | Верно ли, что при любых $x>0$ $\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$? |
| 17 | Верно ли, что при любых $x>0$ $\frac{x^3-4}{x^2-1}=1+\frac{x^2}{x-1}$? |
| 18 | Верно ли, что найдутся такие различные числа $a$ и $b$, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$? |
| 19 | Верно ли, что найдутся такие различные числа $a$ и $b$, что $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$? |
| 20 | Верно ли, что найдутся числа $a$ и $b$, при которых справедливо $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$? |
| 21 | Верно ли, что найдутся числа $a$ и $b$, при которых справедливо $\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x^2+x+1}$? |
| 22 | Верно ли, что сумма коэффициентов многочлена $(x^2-1)^7+5$ равна 4? |
| 23 | Верно ли, что многочлен $x^5-3x^4+2x^2+5x-2$ делится на $(x-2)$ без остатка? |
| 24 | Верно ли, что существует $a$, при котором $ax^2-3x+a+1$ делится на $(x+1)$ без остатка? |
| 25 | Верно ли, что $-1{,}1^{10}>-1{,}1^{20}$? |

| | |
|---|---|
| 26 | Верно ли, что $(1{,}01)^{-31} > (1{,}02)^{-31}$? |
| 27 | Верно ли, что если $b-a>0$, то $b>a$? |
| 28 | Верно ли, что если $b^2 > a^2$, то $b>a$? |
| 29 | Верно ли, что если $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, то $b>a$? |
| 30 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$? |
| 31 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}}$? |
| 32 | Верно ли, что $(\sqrt{x} - \sqrt{-x})^2 = x$ для всех $x$ из области определения? |
| 33 | Верно ли, что $\sqrt{x^2} / \sqrt{-x} = \sqrt{-x}$ для всех $x$ из области определения? |
| 34 | Верно ли, что $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ только при $ab \geq 0$? |
| 35 | Верно ли, что $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{-a}$ только при $ab \geq 0$? |
| 36 | Верно ли, что $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$ только при $ab \geq 0$? |
| 37 | Верно ли, что если $ab \leq 0$, то $\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2}} = 1$? |
| 38 | Верно ли, что если $ab \leq 0$, то $a\sqrt[4]{b^2} = -\sqrt{-a^2b}$? |
| 39 | Верно ли, что найдутся отличные от нуля числа $a$ и $b$, удовлетворяющие равенству $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? |
| 40 | Верно ли, что найдутся отличные от нуля числа $a$ и $b$, удовлетворяющие равенству $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? |

*ТЕСТ 2*

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что $\dfrac{6^6\cdot 2^3-3^6}{6^6+6^3\cdot 3^3+3^6}$ целое число? |
| 2 | Верно ли, что $\dfrac{5\cdot 5^0-(-2)^{-3}\cdot 4}{3\cdot 3^{-1}+(-2)^{-4}\cdot 4}$ целое число? |
| 3 | Верно ли, что при любом $n\in \boldsymbol{N}$ $\dfrac{(3n+5)^2-16}{3}$ целое число? |
| 4 | Верно ли, что при любом $n\in \boldsymbol{N}$ $\dfrac{3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n}{10}$ целое число? |
| 5 | Верно ли, что число $\dfrac{1}{1-0{,}1}+\dfrac{1}{1+0{,}1}+\dfrac{1}{1+0{,}1^2}+\dfrac{1}{1+0{,}1^4}$ равно 1? |
| 6 | Верно ли, что число $8+4\sqrt{3}$ является квадратом числа $\sqrt{2}+\sqrt{6}$? |
| 7 | Верно ли, что число $17-12\sqrt{2}$ является квадратом числа $2\sqrt{2}-3$? |
| 8 | Верно ли, что число $\sqrt{2}-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ равно 0? |
| 9 | Верно ли, что число $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ равно 1? |
| 10 | Верно ли, что число $\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{10}$ равно 1? |
| 11 | Верно ли, что $\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[6]{x^6}$ равно нулю для всех $x$? |
| 12 | Верно ли, что $x\sqrt{x}-x\sqrt{-x}$ равно нулю для всех $x$ из области определения выражения? |
| 13 | Верно ли, что $-1$ является корнем уравнения $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$? |

| | |
|---|---|
| 14 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором $\frac{a^2+1}{a+1}=a+1$? |
| 15 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором $\frac{a^2+1}{a-1}=a+1$? |
| 16 | Верно ли, что при любых $x>0$ $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=x-1$? |
| 17 | Верно ли, что при любых $x>0$ $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=x^2-x+1$? |
| 18 | Верно ли, что найдутся такие различные числа $a$ и $b$, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$? |
| 19 | Верно ли, что найдутся такие различные числа $a$ и $b$, что $\left(\frac{1}{a}\right)\Big/\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}$? |
| 20 | Верно ли, что найдутся числа $a$ и $b$, при которых справедливо $\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$? |
| 21 | Верно ли, что найдутся числа $a$ и $b$, при которых справедливо $\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x^2-x+1}$? |
| 22 | Верно ли, что сумма коэффициентов многочлена $(x^3-3)^5+7$ равна $-25$? |
| 23 | Верно ли, что многочлен $x^4+3x^3-5x^2-3x+4$ делится на $(x+1)$ без остатка? |
| 24 | Верно ли, что существует $a$, при котором $ax^2+3x+a+1$ делится на $(x+1)$ без остатка? |
| 25 | Верно ли, что $(-0{,}96)^{10}>(-0{,}96)^{11}$? |
| 26 | Верно ли, что $(-5)^{-313}>(-3)^{-313}$? |
| 27 | Верно ли, что если $b^3>a^3$, то $b>a$? |

| | |
|---|---|
| 28 | Верно ли, что если $b^2 > a^2$, то $b > a$? |
| 29 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$? |
| 30 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $-x\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x^4}$? |
| 31 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\sqrt[3]{x^2 - x} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-1}$? |
| 32 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$? |
| 33 | Верно ли, что при любом $x \geq 0$ $\sqrt{-x^2} \cdot \sqrt{-x} = \sqrt{x^3}$? |
| 34 | Верно ли, что $(\sqrt{x} + \sqrt{-x})(\sqrt{x} - \sqrt{-x}) = 2$ для всех $x$ из области определения? |
| 35 | Верно ли, что $\sqrt{a^2 b} = \|a\|\sqrt{b}$ только при $ab \geq 0$? |
| 36 | Верно ли, что $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$ только при $ab \geq 0$? |
| 37 | Верно ли, что если $ab \leq 0$, то $\sqrt[4]{a^2 b^2} = \sqrt{ab}$? |
| 38 | Верно ли, что если $ab \leq 0$, то $-b\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{-ab^2}$? |
| 39 | Верно ли, что найдутся отличные от нуля числа $a$ и $b$, удовлетворяющие равенству $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$? |
| 40 | Верно ли, что найдутся отличные от нуля числа $a$ и $b$, удовлетворяющие равенству $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$? |

## Ответы к тестам

| Тест 1 | | | | Тест 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ |
| 1 | нет | 21 | нет | 1 | да | 21 | нет |
| 2 | да | 22 | да | 2 | нет | 22 | да |
| 3 | да | 23 | нет | 3 | да | 23 | да |
| 4 | да | 24 | да | 4 | да | 24 | да |
| 5 | да | 25 | да | 5 | нет | 25 | да |
| 6 | да | 26 | да | 6 | да | 26 | да |
| 7 | да | 27 | да | 7 | да | 27 | да |
| 8 | нет | 28 | нет | 8 | да | 28 | нет |
| 9 | нет | 29 | нет | 9 | да | 29 | нет |
| 10 | да | 30 | да | 10 | да | 30 | да |
| 11 | нет | 31 | да | 11 | нет | 31 | да |
| 12 | нет | 32 | да | 12 | да | 32 | да |
| 13 | да | 33 | да | 13 | да | 33 | да |
| 14 | нет | 34 | да | 14 | да | 34 | нет |
| 15 | нет | 35 | да | 15 | нет | 35 | нет |
| 16 | да | 36 | да | 16 | нет | 36 | нет |
| 17 | нет | 37 | нет | 17 | да | 37 | нет |
| 18 | да | 38 | нет | 18 | нет | 38 | нет |
| 19 | да | 39 | нет | 19 | да | 39 | да |
| 20 | да | 40 | да | 20 | да | 40 | да |

# 2 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ. ТЕОРЕМА ВИЕТА. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

## *2.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

### ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ определяются по формулам:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}}{a}.$$

Если дискриминант $b^2-4ac>0$, уравнение имеет два различных вещественных корня. Если дискриминант $b^2-4ac=0$, уравнение имеет одинаковые вещественные корни. Если дискриминант $b^2-4ac<0$, уравнение не имеет вещественных корней.

Корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ могут быть определены по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

### ТЕОРЕМА ВИЕТА

Если $x_1$, $x_2$ – корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0),$$

то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1\cdot x_2=q.$$

### КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Квадратным трехчленом называется выражение $ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Выделение полного квадрата – это преобразование квадратного трехчлена к виду:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ называется параболой ($a \neq 0$). Ветви параболы направлены вверх (при $a > 0$) или вниз (при $a < 0$), вершина имеет координаты $\begin{cases} x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} \\ y_{\text{в}} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня и парабола пересекает ось $Ox$ в двух точках. Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет два равных корня и парабола касается оси $Ox$. Если $D < 0$, то график квадратичной функции расположен выше ($a > 0$) или ниже ($a < 0$) оси $Ox$.

## ТЕОРЕМЫ О РАСПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Пусть числа $x_1$, $x_2$ ($x_1 < x_2$) есть корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, у которого $D = b^2 - 4ac > 0$ ($a \neq 0$), и даны $A$, $B$ – некоторые точки на оси $Ox$ ($A < B$).

*Теорема 1.* Оба корня меньше числа $A$ ($x_1 < A$, $x_2 < A$) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a > 0 \\ x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} < A \\ f(A) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} < A \\ f(A) < 0 \end{cases}$

*Теорема 2.* Корни лежат по разные стороны от числа $A$ ($x_1 < A < x_2$) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a > 0 \\ f(A) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ f(A) > 0 \end{cases}$

*Теорема 3.* Оба корня больше числа $A$ ($x_1 > A$, $x_2 > A$) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a > 0 \\ x_{\text{в}} > A \\ f(A) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ x_{\text{в}} > A \\ f(A) < 0 \end{cases}$

*Теорема 4.* Оба корня лежат между точками $A$ и $B$ ($A < x_1 < x_2 < B$) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a > 0 \\ A < x_{\text{в}} < B \\ f(A) > 0 \\ f(B) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ A < x_{\text{в}} < B \\ f(A) < 0 \\ f(B) < 0 \end{cases}$

*Теорема 5.* Корни лежат вне отрезка $[A, B]$ $(x_1 < A < B < x_2)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a > 0 \\ f(A) < 0 \\ f(B) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ f(A) > 0 \\ f(B) > 0 \end{cases}$

## *2.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

1. Решите уравнение: $(x^2 + 4x - 15)^2 + 12(x^2 + 4x - 15) - 108 = 0$.

*Решение.*

Введем переменную $t = x^2 + 4x - 15$, тогда исходное уравнение примет вид $t^2 + 12t - 108 = 0$. Его корни $t_1 = 6$ и $t_2 = -18$. Возвращаясь к переменной $x$, получим два уравнения: $x^2 + 4x - 21 = 0$ и $x^2 + 4x + 3 = 0$. Корни этих уравнений соответственно $x_1 = -7$; $x_2 = 3$ и $x_3 = -3$; $x_4 = -1$.

*Ответ*: –7; 3; –3; –1.

2. Решите уравнение: $\dfrac{x^2 - 3x + 8}{3x} - \dfrac{12x}{x^2 - 3x + 8} + 3 = 0$.

*Решение.*

ОДЗ (область допустимых значений) задается условиями $x \neq 0$ и $x^2 - 3x + 8 \neq 0$. Второе условие выполняется для любых $x$, так как дискриминант уравнения $x^2 - 3x + 8 = 0$ меньше нуля.

Введем переменную $t = \dfrac{x^2 - 3x + 8}{3x} \neq 0$. Исходное уравнение примет вид $t - 4/t + 3 = 0$ или $t^2 + 3t - 4 = 0$. Корни этого уравнения: $t_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$, или $t_1 = 1$; $t_2 = -4$. Возвращаясь к переменной $x$, получим два уравнения:

$$\frac{x^2 - 3x + 8}{3x} = 1 \text{ и } \frac{x^2 - 3x + 8}{3x} = -4, \text{ или}$$

$$x^2 - 3x + 8 = 0 \text{ и } x^2 + 9x + 8 = 0.$$

Корни этих уравнений соответственно $x_1 = 4$; $x_2 = 2$ и $x_3 = -1$; $x_4 = -8$.

*Ответ*: 4; 2; –1; –8.

3. Не решая уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, найдите $1/x_1 + 1/x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, где $x_1$, $x_2$ – корни квадратного уравнения.

*Решение*.

По теореме Виета $x_1+x_2 = 1$, $x_1\cdot x_2 = -2$ . Тогда

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-2}-=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\cdot x_2 = 1-2(-2) = 5;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1\cdot x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 + x_2)((x_1^2 + x_2^2) - x_1\cdot x_2) = 1\cdot(5 + 2) = 7.$$

. *Ответ*:–1/2; 5; 7.

4. Запишите квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{7}{5-3\sqrt{2}}$.

*Решение*.

Пусть в уравнении $x^2 + px + q = 0$ корень

$$x_1=\frac{7}{5-3\sqrt{2}}=\frac{7(5+3\sqrt{2})}{(5-3\sqrt{2})\cdot(5+3\sqrt{2})}=\frac{7(5+3\sqrt{2})}{25-18}=5+3\sqrt{2}\,.$$

Тогда $x_2=5-3\sqrt{2}$ . По теореме Виета

$p = -(x_1 + x_2) = -(5+3\sqrt{2}+5-3\sqrt{2}) = -10;$ $q = x_1\cdot x_2 = (5+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2}) = 7.$

*Ответ*: $x^2 - 10x + 7 = 0$.

5. Запишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа, обратные корням уравнения $3x^2 + x - 7 = 0$.

*Решение*.

I способ. Уравнение имеет два различных действительных корня, так как $D = 1 + 4\cdot7\cdot3 > 0$. Обозначим $x_1$ и $x_2$ – корни уравнения $3x^2+ x -7= 0$. Тогда $x_1+x_2=-\frac{1}{3}$; $x_1x_2=-\frac{7}{3}$. Корнями искомого уравнения являются числа $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$. Вычислим $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-\frac{3}{7}$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$x^2-\frac{1}{7}x-\frac{3}{7}=0 \text{ или } 7x^2-x-3=0.$$

II способ. Уравнение имеет два различных действительных корня, так как $D > 0$. Пусть $x = \frac{1}{z}$. Тогда

$$3x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{z} - 7 = 0 \Leftrightarrow 3 + z - 7z^2 = 0.$$

Уравнение $7z^2 - z - 3 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{1}{x_1}$ и $z_2 = \frac{1}{x_2}$.

*Ответ*: $7x^2 - x - 3 = 0$.

6. Выделите полный квадрат в квадратном трехчлене $y = \frac{1}{3}x^2 + 5x - 1$.

*Решение*.

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 5x - 1 = \frac{1}{3}(x^2 + 15x - 3) = \frac{1}{3}(x^2 + 2\frac{15}{2}x - 3) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 + 2\frac{15}{2}x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} - 3) = \frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{225}{4} + 3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{237}{4} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{237}{12}.$$

*Ответ*: $\frac{1}{3}\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{237}{12}$.

7. Определите значение $m$, при котором квадратный трехчлен $x^2 - mx + m - 1$ является полным квадратом.

*Решение*.

Квадратный трехчлен является полным квадратом, если $D = 0$.

$$D = m^2 - 4(m - 1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2.$$

*Ответ*: 2.

8. При каких значениях $m$ график квадратичной функции $y = x^2 - 2(m - 1)x + 2m + 1$ пересекает ось $Ox$ в двух точках?

*Решение*.

Сформулированное требование равносильно условию $D > 0$.

$$4(m-1)^2-4(2m+1)>0 \iff 4m^2-8m+4-8m-4>0 \iff m(m-1)>0.$$

*Ответ*: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

9. При каких значениях $m$ квадратный трехчлен $(m^2-1)x^2+2(m-1)x+2$ положителен при любых $x$?

*Решение*.

Сформулированное требование равносильно условию

$$\begin{cases} D<0 \\ (m^2-1)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} m^2-1>0 \\ 4(m-1)^2-8(m^2-1)<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1)>0 \\ 4(m-1)(m+3)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

*Ответ*: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

10. Найдите количество целых значений параметра $m$, при которых абсцисса и ордината вершины параболы $y = (x - 11m)^2 - m^2 + 10m - 21$ положительны.

*Решение*.

$$\begin{cases} x_{\text{в}}=11m \\ y_{\text{в}}=-m^2+10m-21 \end{cases} \iff \begin{cases} m>0 \\ (m-3)\cdot(m-7)<0 \end{cases} \iff \begin{cases} m>0 \\ 3<m<7 \end{cases} \Rightarrow m\in(3,7).$$

*Ответ*: 3.

11. При каких значениях параметра $m$ уравнение

$$(m-2)x^2-4x+m-5=0$$

имеет два различных вещественных корня?

*Решение*.

Если $m = 2$, то уравнение принимает вид $-4x - 3 = 0$ и, следовательно, имеет только один корень. При $m \neq 2$ квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня, если его дискриминант больше нуля. Тогда

$$16-4(m-2)(m-5)>0 \iff 4-(m-2)(m-5)>0.$$

Раскрывая скобки, получим $m^2-7m+6<0 \iff (m-1)(m-6)<0$.

Последнее неравенство выполняется при $1 < m < 6$. С учетом условия $m \neq 2$ получаем $m\in(1, 2) \cup (2, 6)$.

*Ответ*: $(1, 2) \cup (2, 6)$.

12. Найдите все значения параметра $m$, при которых уравнение $(m-1)x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$ имеет не более одного вещественного корня.

*Решение*.

Если $m = 1$, то уравнение принимает вид $5x + 8 = 0$ и, следовательно, имеет один корень. При $m \neq 1$ квадратное уравнение имеет не более одного вещественного корня, если его дискриминант не больше нуля. Тогда

$$(m+4)^2 - 4(m-1)(m+7) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3m^2+16m-44 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)(m+22/3) \ge 0.$$

*Ответ*: $(-\infty,-22/3] \cup \{1\} \vee [2,+\infty)$.

13. При каких значениях параметра $m$ в уравнении $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ один корень будет в два раза больше другого?

*Решение*.

$$D = 4m^2 + 4m + 1 - 8m^2 + 72m - 312 > 0 \Rightarrow 4m^2 - 76m + 311 < 0;$$

$$m_{1,2} = \frac{76 \pm \sqrt{5776-4976}}{8} = \frac{76 \pm \sqrt{800}}{8} \approx \frac{76 \pm 28{,}28}{8} \approx \begin{cases} 13 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \quad m \in (6,13).$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2 - 9m - 39}{2} \end{cases}$$

Учитывая условие $x_1 = 2x_2$, имеем: $\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{2m+1}{2} \\ 2x_2^2 = \dfrac{m^2 - 9m + 39}{2} \end{cases}$

Исключая из этих уравнений $x_2$, получим:

$$2\left(\frac{2m+1}{6}\right)^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2} \Rightarrow 4m^2+4m+1=9m^2-81m+351$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2-17m+70=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=7,\ m_2=10.$$

Оба значения удовлетворяют условию $m \in (6, 13)$.

*Ответ*: 7, 10.

14. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения $x^2+(4a+5)x+3-2a=0$?

*Решение.*

$$D=(4a+5)^2-4(3-2a)>0 \;\Rightarrow\; 16a^2+40a+25-12+8a>0$$

$$\Rightarrow 16a^2+48a+13>0;$$

$$a_{1,2}=\frac{-48\pm\sqrt{2304-832}}{32}\approx\frac{-48\pm 38{,}57}{32}\approx\left[\begin{array}{l}-0{,}3\\-2{,}7\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$a\in(-\infty,-2{,}7)\cup(-0{,}3,+\infty).$$

По утверждению теоремы 2

$f(2)=2^2+(4a+5)+3-2a<0 \quad\Rightarrow\quad 17+6a<0 \quad\Rightarrow\quad a<-17/6.$

*Ответ*:$(-\infty, -17/6)$.

15. Установите, при каких значениях параметра $m$ корни уравнения $4x^2-2x+m=0$ заключены в интервале $(-1, 1)$.

*Решение.*

I способ. Корни уравнения вычисляются по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-16m}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{1-4m}}{4}.$$

Вещественные корни существуют при $1-4m\ge 0$ или при $m\le 1/4$. Пусть для корней уравнения $x_1$ и $x_2$ выполняются неравенства $-1<x_2\le x_1<1$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{1-4m}}{4}>-1\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{1-4m}}{4}<1\\ 1-4m\ge 0\end{cases} \quad \begin{cases}\sqrt{1-4m}<5\\ \sqrt{1-4m}<3\\ m\le\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-6\\ m>-2\\ m\le\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le\frac{1}{4}.$$

II способ. $D=4-16m\ge 0 \;\Rightarrow\; m\le 1/4$. По утверждению теоремы 4

$$\begin{cases} -1 < x_в < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2/8 < 1 \\ 4 + 2 + m > 0 \\ 4 - 2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 6 > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > -2\,.$$

*Ответ*: (–2, 1/4].

16. При каких значениях параметра $m$ корни уравнения $x^2 - (m + 2)x - 3m + 10 = 0$ по модулю больше 2?

*Решение*.

$$D > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 4(-3m + 10) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 + 12m - 40 > 0 \Rightarrow$$
$$m^2 + 16m - 36 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -18) \cup (2, +\infty).$$

Условие $|x_1| > 2$, $|x_2| > 2$ равносильно тому, что $x_1$, $x_2$ лежат вне отрезка [–2, 2]. Теперь по утверждению теоремы 5 получим:

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 - (m+2)(-2) - 3m + 10 < 0 \\ f(2) = 2^2 - (m+2)\cdot 2 - 3m + 10 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -m + 18 < 0 \\ -5m + 10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 18 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow m > 18.$$

*Ответ*: (18, +∞).

## *2.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

Решите уравнения.

1. $\dfrac{x-3}{x} - \dfrac{6x}{x-3} - 1 = 0.$

*Ответ*: 1; –3/2.

2. $\dfrac{x^2 - 12}{x} - \dfrac{4x}{x^2 - 12} + 3 = 0.$

*Ответ*: 4; –3; 2; –6.

3. $x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 4.$

Указание. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\,.$

4. $(2x^2 + 7x - 1)^2 + 9(2x^2 + 7x - 1) = 36.$

*Ответ*: 1/2; –4.

*Ответ*: 1; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

5. Не решая уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$, найдите $x_1^3 + x_2^3$ и $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$, где $x_1$, $x_2$ – корни квадратного уравнения.

*Ответ*: –117; 0,29.

6. Запишите квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $9x^2 - 12x - 14 = 0$.

*Ответ*: $14x^2 + 12x - 9 = 0$.

7. Какой вид имеет квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{16\sqrt{3} - 25}{2 - \sqrt{3}}$.

*Ответ*: $x^2 + 4x - 143 = 0$.

8. При каких значениях $m$ квадратное уравнение $mx^2 + (m - 3)x + m = 0$ не имеет вещественных корней?

*Ответ*: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

9. При каких значениях параметра $m$ уравнение $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ имеет два различных вещественных корня?

*Ответ*: $(1, 2) \cup (2, 6)$.

10. При каких значениях $m$ уравнение $mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ имеет два различных вещественных корня?

*Ответ*: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

11. При каких значениях $m$ уравнение $mx^2 + 3x + m - 4 = 0$ имеет два одинаковых вещественных корня?

*Ответ*: –1/2, 9/2.

12. Найдите количество целых значений параметра $m$, при которых абсцисса вершины параболы $y = (x - 10m)^2 + m^2 - 16$ положительна, а ордината отрицательна.

*Ответ*: 3.

13. При каких значениях $m$ корни уравнения $x^2 - 3x + 2m + 3 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 3x_2 = 23$?

*Ответ*:–15,5.

14. При каких значениях $m$ разность наибольшего и наименьшего корней уравнения $2x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0$ равна их произведению?

*Ответ*: 2.

15. Установите, при каких значениях параметра $m$ корни уравнения $x^2 + 2x + m = 0$ отрицательны.

*Ответ*: (0, 1].

16. При каких значениях параметра $m$ корни уравнения $x^2 - mx + m + 3 = 0$ отрицательны?

*Ответ*: (–3, 0).

17. При каких значениях $m$ оба корня уравнения $x^2 - (2m - 5)x + m^2 - 5m + 6 = 0$ положительны?

*Ответ*:(3, +∞).

18. При каких значениях $m$ оба корня уравнения $4a^2x^2 - 8mx + 4 - 9m^2 = 0$ больше 3?

*Ответ*: (0, 2/9).

## 2.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

**Квадратное уравнение. Теорема Виета** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти площадь прямоугольника, длины сторон которого численно равны корням уравнения: $\sqrt{2}x^2-17x+3=0$ |
| 2 | Найти наибольшее отрицательное значение параметра $a$, при котором уравнение $5x^2+2ax+5=0$ имеет два положительных корня. |
| 3 | При каком положительном значении параметра $a$ уравнение $(2-a)x^2-2(1+a)x+4=0$ имеет равные корни? |
| 4 | При каком значении параметра $a$ уравнение $ax^2+2ax+x=1$ не имеет решений? |
| 5 | При каких значениях параметра $a$ уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение? |
| 6 | Составить квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения: $4x^2-13x+7=0$ |
| 7 | При каком значении $p$ отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно (–4)? |
| 8 | В уравнении $x^2-2x+q=0$ найти $q$ такое, что корни $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $2x_1-x_2=7$. |
| 9 | Каково наибольшее значение $a$, при котором сумма корней уравнения $x^2-2ax+2a-1=0$ равна сумме квадратов корней? |
| 10 | При каких значениях $a$, оба корня уравнения $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ больше трех? |

**Квадратное уравнение. Теорема Виета** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти длину средней линии трапеции, длины оснований которой численно равны корням уравнения: $\sqrt{3}x^2 - 9x + 5 = 0$ |
| 2 | Найти наименьшее целое положительное значение параметра $a$, при котором оба корня уравнения $(a+1)x^2 - 4ax + a - 5 = 0$ положительны. |
| 3 | При каком целом $a$ уравнение $(a-3)x^2 + 2x + 3a - 11 = 0$ имеет равные корни? |
| 4 | При каких значениях параметра $a$ неравенство $x^2 + 2ax + 1 > 0$ выполняется для любых $x$? |
| 5 | При каком $a$ уравнение $(a+4)x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет единственное решение? |
| 6 | Составить квадратное уравнение, корни которого больше на 1 корней уравнения: $2x^2 - 8x + 3 = 0$ |
| 7 | При каком значении $p$ отношение корней уравнения $x^2 - 2px + 5p = 0$ равно 5? |
| 8 | В уравнении $x^2 - 2x + q = 0$ найти $q$ такое, что корни $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $2x_1 + x_2 = 3$. |
| 9 | Каково $q$, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 18x + q = 0$ равна 300? |
| 10 | При каких значениях $a$, оба корня уравнения $x^2 - 2ax - 1 = 0$ лежат в интервале $[-2,2]$? |

**Квадратное уравнение. Теорема Виета** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти периметр параллелограмма, длины сторон которого численно равны корням уравнения: $\sqrt{3}x^2 - 12x + 14 = 0$ |
| 2 | Найти значение параметра $a$, при котором оба корня уравнения $3x^2 - ax + 4a = 0$ положительны. |
| 3 | При каком значении параметра $a$ уравнение $(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0$ имеет равные корни? |
| 4 | При каких целых значениях параметра $a$ неравенство $x^2 - 2(4a-1)x + 15a^2 - 2a - 7 > 0$ выполняется для любых $x$? |
| 5 | При каком $a$ уравнение $ax^2 + 2ax + 4 = 0$ имеет единственное решение? |
| 6 | Какой вид имеет квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней уравнения: $3x^2 + 7x - 11 = 0$? |
| 7 | При каком значении $p$ отношение корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равно 4? |
| 8 | В уравнении $x^2 - 4x + q = 0$ найти $q$ такое, что корни $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $3x_1 + 5x_2 = 2$. |
| 9 | При каком $a$ разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению? |
| 10 | При каких значениях $a$, оба корня уравнения $x^2 + 2(a-1)x + a + 5 = 0$ больше 1? |

**Квадратное уравнение. Теорема Виета** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти площадь прямоугольного треугольника, длины катетов которого численно равны корням уравнения: $\sqrt{2}x^2-10x+8=0$ |
| 2 | Найти значение параметра $a$, при котором оба корня уравнения $x^2+(a-3)x+a=0$ положительны. |
| 3 | При каком значении параметра $a$ парабола $y=9x^2-12x+20a$ касается оси $OX$? |
| 4 | При каких значениях параметра $a$ парабола $y=9ax^2-12x+20$ не имеет общих точек с осью $OX$? |
| 5 | При каком $a$ уравнение $(a-2)x^2-2(a+1)x+a-2=0$ имеет единственное решение? |
| 6 | Какой вид имеет квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения: $3x^2+7x-1=0$? |
| 7 | При каком значении $p$ отношение корней уравнения $2x^2+(p-10)x+6=0$ равно 12? |
| 8 | В уравнении $2x^2-6x+q=0$ найти $q$ такое, что корни $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $x_1+2x_2=5$. |
| 9 | Каково положительное значение $q$, при котором один корень уравнения $8x^2-6x+9q=0$ равен квадрату другого? |
| 10 | При каких значениях $a$, корни уравнения $x^2-ax+2=0$ расположены по разные стороны от числа 2? |

**Квадратное уравнение. Теорема Виета** **Ответы**

| № варианта / № задания | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $1{,}5\sqrt{2}$ | $1{,}5\sqrt{3}$ | $8\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ |
| **2** | –6 | 6 | $a \geq 48$ | $0 < a < 1$ |
| **3** | 1 | 4 | 4 | 0,2 |
| **4** | –1 | (–1, 1) | 3 | $a > \frac{1}{5}$ |
| **5** | 5 | {–4; –13} | 4 | $\left\{\frac{1}{5};1\right\}$ |
| **6** | $7x^2-13x+4=0$ | $2x^2-12x+13=0$ | $3x^2+14x-44=0$ | $3x^2+7x-1=0$ |
| **7** | {–6; 6} | 9 | $\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$ | {–3; 23} |
| **8** | –3 | 1 | –45 | 4 |
| **9** | 1 | 12 | 2 | $\frac{1}{9}$ |
| **10** | $a > \frac{11}{9}$ | $a \in \left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]$ | $-\frac{4}{3} < a < -1$ | $a > 3$ |

# 3 РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

## *3.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

### РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рациональным уравнением называется уравнение вида $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = 0$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени $n$ и $m$ соответственно, $P_n(x) \neq 0$.

Решение рационального уравнения сводится к решению уравнения $Q_m(x) = 0$ и проверке того, что корни удовлетворяют условию $P_n(x) \neq 0$.

### БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение четвертой степени вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ (a \neq 0)$$

называется биквадратным уравнением.

Подстановкой $x^2 = t,\quad t \geq 0$ биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению относительно переменной $t$.

### СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ (a \neq 0)$$

называется симметричным уравнением третьей степени. Симметричное уравнение третьей степени имеет корень $x_1 = -1$ и, следовательно, равносильно уравнению $(x+1)(ax^2 + (b-a)x + a) = 0$.

Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$, $a \neq 0$ называется симметричным уравнением четвертой степени. Симметричное уравнение четвертой степени заменой $t = x \pm \dfrac{1}{x}$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c \mp 2a = 0$.

### РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \geq 0 \quad (> 0, \leq 0, < 0),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней $n$ и $m$ соответственно.

#### Свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
3. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

4. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$ .
5. Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$ .
6. Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

## МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Находятся корни числителя и знаменателя и наносятся на числовую ось $OX$.

2. На числовой оси $OX$ выкалываются корни знаменателя и, если неравенство строгое, корни числителя.

3. Устанавливаются знаки дроби в левой части неравенства в каждом из полученных интервалов.

4. Объединение интервалов, в которых знак дроби совпадает со знаком неравенства, является решением неравенства.

## МОДУЛЬ

**Модулем,** или абсолютной величиной вещественного числа $a$, называется

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0 \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Имеет место равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

### Некоторые важные неравенства

1. Если $|x - a| < \alpha$, то $a - \alpha < x < a + \alpha$;
   если $|x - a| > \alpha$, то $x < a - \alpha \cup x > a + \alpha$.
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
3. Если $a > 0$, то $a + 1 / a \geq 2$. При $a \neq 1$ неравенство становится строгим.
4. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

## УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

### Уравнение вида $f(|x|) = g(x)$

Уравнение вида $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$;    2) $\begin{cases} f(-x) = g(x) \\ x < 0 \end{cases}$.

### Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$1)\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad 2)\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}\end{array}\right..$$

### Уравнение вида $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| = g(x)$

Уравнение, представляющее собой алгебраическую сумму модулей, решается методом интервалов. Область определения уравнения разбивается критическими точками (значения $x$, при которых выражения стоящие под знаком модуля обращаются в ноль) на интервалы, в которых выражения под знаком модуля сохраняют знак. Решение уравнения есть объединение решений, полученных для каждого интервала.

### Неравенства с модулем.

Неравенства с модулем решаются по схемам, аналогичным решению уравнений:

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.;$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases};$$

$$|f(x)| \le |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \le g^2(x).$$

Неравенства, содержащие алгебраическую сумму модулей, решаются методом интервалов.

## 3.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Решите уравнение $2\frac{5x^2+4}{x+1}+\frac{3}{x^2+x}=\frac{33x}{x+1}$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Приведя уравнение к общему знаменателю, получим:

$$\frac{2(5x^2+4)x+3-33x^2}{x(x+1)}=0 \quad \Rightarrow \quad 10x^3 - 33x^2 + 8x + 3 = 0.$$

Путем подбора находим корень $x_1 = 3$. В результате деления многочлена $10x^3 - 33x^2 + 8x + 3$ на двучлен $x - 3$ получим квадратный трехчлен $10x^2 - 3x - 1$, корни которого $x_2 = -1/5$ и $x_3 = 1/2$. Тогда

$$10x^3 - 33x^2 + 8x + 3 = (x - 3)(x + 1/5)(x - 1/2).$$

*Ответ*: –1/5; 1/2; 3.

2. Решите уравнение $2\frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2}+3x=1$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Приведя к общему знаменателю, получим

$$\frac{2x^3+4x^2+2x+4+3x^2+6x-x-2}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+7x^2+7x+2}{x+2}=0$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 0{,}5)(x + 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow$$

*Ответ*: –1; –0,5.

3. Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

*Решение.*

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4(x + \frac{1}{x}) - 5 = 0 .$$

Выполним замену переменной $t = x + \frac{1}{x}$, тогда

$$t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

и уравнение принимает вид

$$t^2 - 2 - 4t + 5 = 0 \text{ или } t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Его корни равны $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$.

Уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 1$ или $x^2 - x + 1 = 0$ действительных корней не имеет.

Если $x + \dfrac{1}{x} = 3$, то уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет корни: $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

*Ответ*: $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Найдите среднее арифметическое действительных корней уравнения $x^3 - 19x - 12 = 0$.

*Решение.*

$$x^3 - 19x - 12 = (x^3 - 16x) - 3(x + 4) = x(x - 4)(x + 4) - 3(x + 4) =$$
$$= (x + 4)(x^2 - 4x - 3).$$

Уравнение $(x + 4)(x^2 - 4x - 3) = 0$ имеет корни: $x_1 = -4$; $x_2 = 2 + \sqrt{7}$; $x_3 = 2 - \sqrt{7}$.

*Ответ*: 0.

5. Решите уравнение $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0.$

*Решение.*

Раскладывая числитель и знаменатель на множители, получаем:

$$\frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} = 0.$$

ОДЗ: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Так как $x \neq 1$,

$$\frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} = 0 \Rightarrow \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)(x - 2) = 0.$$

*Ответ*: $-1$; $2$.

6. Решите уравнение $\dfrac{7x + 4}{5} - x = \dfrac{|3x - 5|}{2}$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4x+8=|15x-25|.$$

Рассмотрим два случая:

1) $x \geq 5/3 \quad \Rightarrow \quad 4x + 8 = 15x - 25 \quad \Rightarrow \quad 11x = 33 \quad \Rightarrow \quad x = 3$;
2) $x < 5/3 \;\Rightarrow\; 4x + 8 = -15x + 25 \;\Rightarrow\; 19x = 17 \;\Rightarrow\; x = 17/19$.

*Ответ*: 17/19; 3.

7. Решите уравнение $|x + 1| + |x - 5| = 8$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Рассмотрим три случая:

1) $x < -1 \quad \Rightarrow \quad -(x + 1) - (x - 5) = 8 \;\Rightarrow\; -2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$;
2) $-1 \leq x < 5 \;\Rightarrow\; (x + 1) - (x - 5) = 8 \;\Rightarrow\; 6 = 4$, чего быть не может;
3) $x \geq 5 \quad \Rightarrow \quad (x + 1) + (x - 5) = 8 \;\Rightarrow\; 2x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6$.

*Ответ*: –2; 6.

8. Решите уравнение $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = |x|$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = |x| \quad \Rightarrow \quad |x - 1| = |x| \cdot |x + 3|.$$

Задача сводится к решению двух уравнений:

1) $x - 1 = x(x + 3) \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,\,2} = -1$;
2) $x - 1 = -x(x + 3) \;\Leftrightarrow\; x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow\; x_{3,\,4} = -2 \pm \sqrt{5}$.

*Ответ*: $-2-\sqrt{5}$; $-1$; $-2+\sqrt{5}$.

9. Решите уравнение $|x^2 - 4| + |4 - x^2| = 10$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Рассмотрим два случая:

1) $|x| < 2 \;\Rightarrow\; -(x^2 - 4) + (4 - x^2) = 10 \;\Rightarrow\; -2x^2 = 2 \;\Rightarrow$ решений нет;
2) $|x| \geq 2 \;\Rightarrow\; (x^2 - 4) - (4 - x^2) = 10 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 18 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm 3$.

*Ответ*: ±3.

10. Решите уравнение $x^2 + 5|x| - 6 = 0$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Рассмотрим два случая:

1) $x < 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 6;\ x_2 = -1$.
Корень $x = 6$ не удовлетворяет условию $x < 0$;

2) $x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -6$.
Корень $x = -6$ не удовлетворяет условию $x \geq 0$.

*Ответ*: –1; 1.

11. Решите неравенство $|x - 5| > 3/2$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Рассмотрим два случая:

1) $x < 5 \Rightarrow -(x - 5) > 3/2 \Rightarrow -x + 5 > 3/2 \Rightarrow x < 7/2$;
2) $x \geq 5 \Rightarrow x - 5 > 3/2 \Rightarrow x > 13/2$.

*Ответ*: $(-\infty, 7/2) \cup (13/2, +\infty)$.

12. Решите неравенство $\left|\dfrac{3x-7}{x+1}\right| > 3$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
Рассмотрим два случая:

1) $\dfrac{3x-7}{x+1} > 3 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-10}{x+1} > 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$;

2) $\dfrac{3x-7}{x+1} < -3 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{x+1} + 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{6x-4}{x+1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 2/3$.

*Ответ*: $(-\infty, -1) \cup (-1, 2/3)$.

13. Решите неравенство $|x^2 + 5x + 6| \geq 12$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty,\ +\infty)$.
Задача сводится к решению двух неравенств:

1) $x^2 + 5x + 6 \ge 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x - 6 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \le -6 \cup x \ge 1$;
2) $x^2 + 5x + 6 \le -12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x + 18 \le 0$.
Это неравенство не выполняется ни при каких значениях $x$.

*Ответ*: $(-\infty, -6] \cup [1, +\infty)$.

14. Решите неравенство $x^2 + 3\,|\,x - 1\,| \le 1$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty,\ +\infty)$.
Рассмотрим два случая:

1) $x < 1 \ \Rightarrow\ x^2 - 3(x - 1) \le 1 \ \Rightarrow\ x^2 - 3x + 2 \le 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) \le 0 \ \Rightarrow\ 1 < x \le 2$. Решение не удовлетворяет условию $x < 1$;
2) $x \ge 1 \ \Rightarrow\ x^2 + 3(x - 1) \le 1 \ \Rightarrow\ x^2 + 3x - 4 \le 0 \ \Rightarrow\ (x + 4)(x - 1) \le 0 \Rightarrow -4 \le x \le 1$. Учитывая условие $x \ge 1$, получаем $x = 1$.

*Ответ*: 1.

15. Решите неравенство $\left|\dfrac{x+6}{x+2}\right| \ge |x-4|$.

*Решение.*

ОДЗ: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.
Подставив в неравенство значение $x = 4$, убеждаемся, что оно является решением неравенства. При $x \ne 4$ запишем равносильное неравенство

$$\left|\frac{x+6}{(x+2)(x-4)}\right| \ge 1.$$

Задача сводится к решению двух неравенств:

1) $\dfrac{x+6}{(x+2)(x-4)} \ge 1$; 2) $\dfrac{x+6}{(x+2)(x-4)} \le -1$.

Решая эти неравенства методом интервалов, получим соответственно:

$$x \in [3/2 - \sqrt{65}/2, -2) \cup (4, 3/2 + \sqrt{65}/2\,] \text{ и } x \in (-2, -1] \cup [2, 4).$$

Объединив решения, находим:

$$x \in [3/2 - \sqrt{65}/2, -2) \cup (-2, -1] \cup [2, 4) \cup (4, 3/2 + \sqrt{65}/2].$$

Значение $x$ = 4 также является решением исходного неравенства, поэтому

$$x \in [3/2-\sqrt{65}/2,\ -2) \cup (-2,\ -1] \cup [2,\ \ 3/2+\sqrt{65}/2].$$

*Ответ*: $[3/2-\sqrt{65}/2,\ -2) \cup (-2,\ -1] \cup [2,\ \ 3/2+\sqrt{65}/2]$.

## *3.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

1. Решите уравнение $\dfrac{3x^2-20x-7}{x^2-2x}=0$.

   *Ответ*: –1/3; 7.

2. Решите уравнение $18x^2+\dfrac{2}{x^2}=16-3x-\dfrac{1}{x}$.

   *Ответ*: –1; –1/3; 1/2; 2/3.

3. Найдите среднее арифметическое вещественных корней уравнения
$$(x-2)(x+3)^3+(2-x)(x+1)^3=98(x-2).$$

   *Ответ*: –2/3.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{x^2}{y}=1.\end{cases}$

   *Ответ*: $(1,\ 1);\ (-1/2,\ 1/4)$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y=5\\ x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

   *Ответ*: $(3,\ 2);\ (2,\ 3)$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+xy+y=9\\ x^2+y^2=17.\end{cases}$

   *Ответ*: $(1,\ 4);\ (4,\ 1)$.

7. Решите неравенство $\dfrac{x-5}{1-4x}>-2$

   *Ответ*: $(-\infty,\ -3/7)\cup(1/4,\ +\infty)$.

8. Решите неравенство $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2(x+1)}\geq 1$.

   *Ответ*: $[-2,\ -1)\cup(0,\ 1/2)$.

9. Решите неравенство $\dfrac{6x^2+25x-28}{2x+1}\geq x$.

   *Ответ*: $[-7,\ -1/2)\cup[1,\ +\infty)$.

10. Найдите число целых решений неравенства $\frac{2x^3-3x^2-35x}{x^2-7x+12}\cdot\frac{1}{1-x}\geq 0$.

*Ответ*: 6.

11. Найдите число целых решений неравенства

$$\frac{5x+9}{(x^2+10x+24)\cdot(x^2+5x+4)}\geq\frac{1}{x^2+8x+16}.$$

*Ответ*: 4.

Решите уравнение.

12. $\frac{3x-1}{2}+x=|x+1|$.
*Ответ*: 1.

13. $\frac{3-x}{4}+2x=|x-3|$.
*Ответ*: 9/11.

14. $|x - 1/2| + 3 = |x + 7|$.
*Ответ*: –7/4.

15. $|x| - |3x + 2| = 1$.
*Ответ*: решений нет.

16. $2x^2 + 5|x| - 3 = 0$.
*Ответ*: ±1/2.

17. $3x^2 - 7|x| + 2 = 0$.
*Ответ*: ±1/3; ±2.

Решите неравенство.

18. $|x + 1/2| \geq 1/7$.
*Ответ*: $(-\infty, -9/14] \cup [-5/14, +\infty)$.

19. $\left|\frac{x+3}{2x-1}\right|<\frac{1}{3}$.
*Ответ*: $(-10; -8/5)$.

20. $\left|\frac{2x-3}{x}\right|\leq 5$.
*Ответ*: $(-\infty, -1] \cup [3/7, +\infty)$.

21. $|x - 2| > |x + 1| - 3$.
*Ответ*: $(-\infty, 2)$.

22. $|4x^2 - 10x + 5| < 1$.
*Ответ*: $(1/2, 1) \cup (3/2, 2)$.

23. $\left|\frac{x^2-2x}{x+1}\right|<2$.
*Ответ*: $(2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6})$.

24. $x^2 - 4|x - 2| \leq 4$
*Ответ*: [–6, 2].

25. $\left|\frac{2x+1}{x-3}\right|<|x+1|$.
*Ответ*: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2-\sqrt{8}, \sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{8}, +\infty)$.

## *3.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3*

**Рациональные уравнения** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\frac{x-2}{x-3}-\frac{2}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$ |
| 2 | Найти сумму корней $(x^2-x-6)\left(\frac{-4x}{x-3}+6\right)=0$ |
| 3 | Найти сумму корней $(x-4)(x^2+11x-18)=4x^2-16x$ |
| 4 | Решить уравнение $\frac{x-2}{3x^2-4x-4}=\frac{1}{3}$ |
| 5 | Решить уравнение $\frac{x(x+3)}{\frac{1}{3-x}+\frac{2}{x-5}}=\frac{4}{\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x-3}}$ |
| 6 | Решить уравнение: $x^4-8x^2=9$ |
| 7 | Решить уравнение $x^6-7x^3-8=0$ |
| 8 | Решить уравнение, подобрав целый корень $x^3-3x+2=0$ |
| 9 | Решить уравнение, полагая $t=x+\frac{1}{x}$ $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$ |
| 10 | Решить уравнение $x^4-3x^3+3x+1=0$ |

**Рациональные уравнения** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\frac{x-1}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$ |
| 2 | Найти сумму корней $(x^2+5x-14)\left(\frac{3x}{x-2}-5\right)=0$ |
| 3 | Найти сумму корней $(x-2)(x^2-12x+15)=-4x^2-8x$ |
| 4 | Решить уравнение $\frac{x+4}{3x^2+9x-12}=\frac{1}{4}$ |
| 5 | Решить уравнение $\dfrac{x(1-x)}{\frac{2}{5-x}+\frac{1}{x-4}}=\dfrac{6}{\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x-4}}$ |
| 6 | Решить уравнение $x^4=3x^2+4$ |
| 7 | Решить уравнение $x^3+x^2=2x$ |
| 8 | Решить уравнение, подобрав целый корень $x^3+x^2-5x+3=0$ |
| 9 | Решить уравнение, полагая $t=x-\frac{1}{x}$ $x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x-\frac{1}{x}\right)=8$ |
| 10 | Решить уравнение $x^4-2x^3-5x^2+2x+1=0$ |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\frac{x+1}{x+3}+\frac{9}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}$ |
| 2 | Найти сумму корней $(x^2+7x+12)\left(\frac{-6x}{x+3}+12\right)=0$ |
| 3 | Найти сумму корней $(x-6)(x^2+3x-12)=2x^2+12x$ |
| 4 | Решить уравнение $\frac{x+3}{3x^2+7x-6}=\frac{1}{2}$ |
| 5 | Решить уравнение $\frac{x(x-3)}{\frac{3}{x-8}-\frac{2}{x-7}}=\frac{10}{\frac{2}{7-x}+\frac{3}{x-8}}$ |
| 6 | Решить уравнение $x^4-x^2=12$ |
| 7 | Решить уравнение $x^3+x^2=4x+4$ |
| 8 | Решить уравнение, подобрав целый корень $x^3-2x^2-3x+4=0$ |
| 9 | Решить уравнение, полагая $t=x-\frac{2}{x}$ $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-8\left(x-\frac{2}{x}\right)=4$ |
| 10 | Решить уравнение $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$ |

**Рациональные уравнения** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\frac{x-5}{x-2}-\frac{2}{x+2}=-\frac{12}{x^2-4}$ |
| 2 | Найти сумму корней $(x^2-7x+12)\left(\frac{3x}{x-4}-6\right)=0$ |
| 3 | Найти сумму корней $(x+5)(x^2-2x-12)=2x^2+10x$ |
| 4 | Решить уравнение $\frac{x+2}{6x^2+8x-8}=\frac{1}{3}$ |
| 5 | Решить уравнение $\frac{x(x+5)}{\frac{2}{x-7}-\frac{1}{x-4}}=\frac{6}{\frac{2}{x-7}+\frac{1}{4-x}}$ |
| 6 | Решить уравнение $x^4-5x^2+4=0$ |
| 7 | Решить уравнение $2x^3+7x^2+7x+2=0$ |
| 8 | Решить уравнение, подобрав целый корень $x^3+2x^2-4x+1=0$ |
| 9 | Решить уравнение, полагая $t=x+\frac{1}{x}$ $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ |
| 10 | Решить уравнение $2x^4-3x^3-4x^2-3x+2=0$ |

**Рациональные уравнения** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | –2 | –7 | –4 | 3 |
| **2** | 7 | –2 | –10 | 11 |
| **3** | –3 | 10 | –7 | –1 |
| **4** | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{7}{6}$ |
| **5** | 4 | –2 | –2 | –6 |
| **6** | {–3; 3} | {–2; 2} | {–2; 2} | {–2;–1;1;2} |
| **7** | {–2; 1} | {–2; 0; 1} | {–2; –1; 2} | $\left\{-2;-1;-\frac{1}{2}\right\}$ |
| **8** | 1; 1; –2 | 1; 1; –3 | 1; $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ | 1; $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ |
| **9** | $1;1;-2\pm\sqrt{3}$ | $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};-3\pm\sqrt{10}$ | $\pm\sqrt{2};4\pm3\sqrt{2}$ | 2; $\frac{1}{2}$ |
| **10** | $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};1\pm\sqrt{2}$ | $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ | $-1;-1;\frac{1}{2};2$ | $-1;1;-2;\frac{1}{2}$ |

**Рациональные неравенства и системы** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти наибольшее целое решение<br>$\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1$ |
| 2 | Решить неравенство<br>$(x-1)(x+3)\geq 0$ |
| 3 | Решить неравенство<br>$x^2+2x>x+2$ |
| 4 | Найти число целых решений<br>$2x^2-3x-2<0$ |
| 5 | Решить неравенство<br>$(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0$ |
| 6 | Решить неравенство<br>$x^2(x-1)\geq 0$ |
| 7 | Решить неравенство<br>$(x-1)(x-2)^2(x-3)>0$ |
| 8 | Найти наибольшее значение параметра $a$,<br>при котором неравенство верно для всех $x$<br>$2x^2-4x-2\geq a$ |
| 9 | Найти целые решения системы неравенств<br>$\begin{cases}2x+3>0\\5x+2<0\end{cases}$ |
| 10 | Найти целые решения системы неравенств<br>$\begin{cases}x+y<2{,}5\\x-y>-3\\y-1>0\end{cases}$ |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти наибольшее целое решение $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+1}{2}>1$ |
| 2 | Решить неравенство $(x+1)(x-3)\le 0$ |
| 3 | Решить неравенство $x^2-5x>3-3x$ |
| 4 | Найти число целых решений $x^2-6x+5<0$ |
| 5 | Решить неравенство $(x+1)(x-2)(x+3)\le 0$ |
| 6 | Решить неравенство $x^2(x+1)\le 0$ |
| 7 | Решить неравенство $(x+1)(x-2)^2(x+3)\le 0$ |
| 8 | Найти наибольшее значение параметра $a$, при котором неравенство верно для всех $x$ $2x^2+4x-4\ge a$ |
| 9 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}3x-2>0\\ 3-x>0\end{cases}$ |
| 10 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}2x+y-7<0\\ 2x-y+3>0\\ y<3\end{cases}$ |

**Рациональные неравенства и системы** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти наибольшее целое решение $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-8}{6}>\frac{1}{6}$ |
| 2 | Решить неравенство $(x-1)(x+2)>0$ |
| 3 | Решить неравенство $x^2-3x+2\geq 4x-4$ |
| 4 | Найти число целых решений $2-x^2-x\geq 0$ |
| 5 | Решить неравенство $(x^2-1)(x+3)<0$ |
| 6 | Решить неравенство $x(x-1)^2\leq 0$ |
| 7 | Решить неравенство $(x-3)^2(x^2-25)\geq 0$ |
| 8 | Найти наибольшее значение параметра $a$, при котором неравенство верно для всех $x$ $4x^2-8x-1\geq a$ |
| 9 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}3x-13<0\\3-x<0\end{cases}$ |
| 10 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}x+y-3<0\\x-y+2{,}5>0\\y>1\end{cases}$ |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти наибольшее целое решение $\frac{x-1}{2}-\frac{2x-3}{3}>1$ |
| 2 | Решить неравенство $(x-4)(x+3)\le 0$ |
| 3 | Решить неравенство $2x^2-x\le 5+x-x^2$ |
| 4 | Найти число целых решений $x^2-4x-5\le 0$ |
| 5 | Решить неравенство $x^2<4$ |
| 6 | Решить неравенство $(x-3)(x^2-9)\le 0$ |
| 7 | Решить неравенство $(x+1)(x+2)(x+3)^2\ge 0$ |
| 8 | Найти наибольшее значение параметра $a$, при котором неравенство верно для всех $x$ $4x^2-4x-1\ge 2a$ |
| 9 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}3x-8<0\\ 2x>3\end{cases}$ |
| 10 | Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases}2x+y-8<0\\ 2x-y+4>0\\ y>4\end{cases}$ |

**Рациональные неравенства и системы** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | –1 | –3 | –2 | –4 |
| **2** | $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$ | $[-1;3]$ | $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ | $[-1;4]$ |
| **3** | $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ | $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$ | $(-\infty;1]\cup[6;\infty)$ | $\left[-1;\frac{5}{3}\right]$ |
| **4** | 2 | 3 | 4 | 7 |
| **5** | $(-\infty;-1]\cup[2;3]$ | $(-\infty;-3]\cup[-1;2]$ | $(-\infty;-3)\cup(-1;1)$ | $(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$ |
| **6** | $[1;\infty)\cup\{0\}$ | $(-\infty;-1)\cup\{0\}$ | $(-\infty;0]\cup\{1\}$ | $(-\infty;-3]\cup\{3\}$ |
| **7** | $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$ | $(-\infty;-3)\cup(-1;2)\cup$ $\cup(2;\infty)$ | $(-\infty;-5]\cup[5;\infty)\cup$ $\cup\{3\}$ | $(-\infty;-2]\cup[1;\infty)$ |
| **8** | –4 | –6 | –5 | –1 |
| **9** | –1 | $\{1;2\}$ | 4 | 2 |
| **10** | (0;2) | (1;4) | (0;2) | (0;2) |

**Дробно–рациональные неравенства** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить неравенство<br>$\frac{1}{x}<1$ |
| 2 | Решить неравенство<br>$\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ |
| 3 | Решить неравенство<br>$\frac{x(x-1)}{x+3}\leq 0$ |
| 4 | Решить неравенство<br>$\frac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0$ |
| 5 | Найти наименьшее целое решение неравенства<br>$\frac{1-2x}{x+4}<3x+4$ |
| 6 | Решить неравенство<br>$\frac{x^2+5x-6}{x-2}\leq 0$ |
| 7 | Решить неравенство<br>$\frac{(x+2)^2}{x^2-1}\leq 0$ |
| 8 | Найти число целых решений неравенства<br>$\frac{x^3-5x^2+4x}{x^2-4x+3}\cdot\frac{1}{3-x}\geq 0$ |
| 9 | Найти число целых решений на промежутке [–10;2]<br>$\frac{2-x-x^2}{3x-2x^2-x^3}\geq 0$ |
| 10 | Найти значение параметра $a$, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax-10}{x}\geq 1$ равно (–2) |

**Дробно–рациональные неравенства** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить неравенство $\frac{1}{x} > 1$ |
| 2 | Решить неравенство $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ |
| 3 | Решить неравенство $\frac{x(x+3)}{x-1} \leq 0$ |
| 4 | Решить неравенство $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$ |
| 5 | Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{6-5x}{x-3} < x-6$ |
| 6 | Решить неравенство $\frac{x^2+2x-3}{x+7} < 0$ |
| 7 | Решить неравенство $\frac{x^2+2x+1}{x^2-5x} \leq 0$ |
| 8 | Найти число целых решений неравенства $\frac{x^3+6x^2+8x}{x^2+5x+6} \cdot \frac{1}{3+x} \leq 0$ |
| 9 | Найти число целых решений на промежутке [–10;2] $\frac{6-x-x^2}{3x-2x^2-x^3} \geq 0$ |
| 10 | Найти значение параметра $a$, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax+8}{x} \leq 2$ равно (–8) |

**Дробно–рациональные неравенства** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить неравенство $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ |
| 2 | Решить неравенство $\frac{x}{x-5} \geq 0$ |
| 3 | Решить неравенство $\frac{(x-1)(x-3)}{x+5} > 0$ |
| 4 | Решить неравенство $\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} \leq 0$ |
| 5 | Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{8-3x}{4x-3} < x+4$ |
| 6 | Решить неравенство $\frac{x^2-x-12}{x-1} \geq 0$ |
| 7 | Решить неравенство $x \geq \frac{25}{1-x} - 9$ |
| 8 | Найти число целых решений неравенства $\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+3x+2} \cdot \frac{1}{x+2} \leq 0$ |
| 9 | Найти число целых решений на промежутке [0;4] $\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x-3)} \geq -1$ |
| 10 | Найти значение параметра $a$, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax-10}{x} \leq 8$ равно (–5) |

**Дробно–рациональные неравенства** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить неравенство $\frac{2}{x}>3$ |
| 2 | Решить неравенство $\frac{x-4}{x+5}\geq 0$ |
| 3 | Решить неравенство $\frac{x^2+3x}{5x-3}\geq 0$ |
| 4 | Решить неравенство $\frac{2x^2-5x-7}{x-5}\geq 3$ |
| 5 | Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{3x+5}{x+4}>5-x$ |
| 6 | Решить неравенство $\frac{x^2-4x-12}{x-2}\geq 0$ |
| 7 | Решить неравенство $\frac{(x-1)^2}{x^2+2x}\leq 0$ |
| 8 | Найти число целых решений неравенства $\frac{x^3+7x^2+12x}{x^2+8x+15}\cdot\frac{1}{x+5}\leq 0$ |
| 9 | Найти число целых решений на промежутке [0;4] $\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-2x}\geq 0$ |
| 10 | Найти значение параметра $a$, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax+8}{x}\geq -5$ равно (–4) |

**Дробно–рациональные неравенства** **Ответы**

| № варианта / № задания | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $(-\infty;0)\cup[1;\infty)$ | $(0;1)$ | $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$ | $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ |
| **2** | $(-\infty;-3)\cup[1;\infty)$ | $(-\infty;-2)\cup[1;\infty)$ | $(-\infty;0]\cup(5;\infty)$ | $(-\infty;-5)\cup[4;\infty)$ |
| **3** | $(-\infty;-3)\cup[0;1]$ | $(-\infty;-3)\cup[0;1)$ | $(-5;-1)\cup(3;\infty)$ | $[-3;0]\cup\left(\frac{3}{5};\infty\right)$ |
| **4** | $[-\infty;-2]\cup\left[\frac{3}{2};\infty\right)$ | $[1;2)\cup(2;3]$ | $(-3;1)\cup\{2\}$ | $(5;\infty)\cup\{2\}$ |
| **5** | 0 | –5 | –4 | 4 |
| **6** | $(-\infty;-6]\cup(1;2)$ | $(-\infty;-7]\cup(-3;1)$ | $(-3;1)\cup[4;\infty)$ | $(-2;2)\cup[6;\infty)$ |
| **7** | $(-1;1)\cup\{-2\}$ | $(0;5)\cup\{-1\}$ | $(1;\infty)\cup\{-4\}$ | $(-2;0)\cup\{1\}$ |
| **8** | 3 | 3 | 2 | 4 |
| **9** | 2 | 1 | 3 | 2 |
| **10** | –4 | 3 | 6 | –3 |

**Уравнения и неравенства с модулем** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\|2x-3\|=5$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$4\|x-1\|=1-5x$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$\|\|x-1\|+3\|=3$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$\|x^2-2x\|=3-2x$ |
| 5 | Найти произведение корней<br>$x^2-2=\|x\|$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\|x-1\|+2\|x+1\|=3$ |
| 7 | Найти число целых решений неравенства<br>$\|10-2x\|-2\leq 0$ |
| 8 | Найти решение неравенства<br>$\|2x-1\|>\|x+2\|$ |
| 9 | Найти значение параметра, при котором уравнение<br>$\|x^2-6ax\|=81a$<br>имеет три корня |
| 10 | Решить систему уравнений<br>$\begin{cases} 2\|x+1\|=6+2y \\ \|y+3\|+4x=-10 \end{cases}$ |

**Уравнения и неравенства с модулем** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\lvert 5-4x\rvert=1$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$\lvert x+4\rvert=2-x$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$\lvert\lvert x-1\rvert-1\rvert=2$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$\lvert x^2-x-8\rvert=-x$ |
| 5 | Найти произведение корней<br>$x^2-6=\lvert x\rvert$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert=11$ |
| 7 | Найти сумму целых решений неравенства<br>$\lvert 1-3x\rvert-7<0$ |
| 8 | Найти решение неравенства<br>$2x^2-3\lvert x\rvert-2\geq 0$ |
| 9 | Найти значение параметра, при котором уравнение<br>$\lvert x^2-2-3x\rvert=a$<br>имеет три корня |
| 10 | Решить систему уравнений<br>$\begin{cases}\lvert x+5\rvert=3y-4\\ \lvert 3y-4\rvert=2x+8\end{cases}$ |

**Уравнения и неравенства с модулем** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\lvert 4x-1\rvert = 7$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$2x-3 = \lvert x+3\rvert$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$\lvert \lvert x+3\rvert + 2\rvert = 2x$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$\lvert x-3\rvert = x^2 - 6x + 7$ |
| 5 | Найти наименьший корень<br>$(x+2)(\lvert x\rvert - 2) = -1$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\lvert x+1\rvert + \lvert x+2\rvert = 2$ |
| 7 | Найти наименьшее $x$, удовлетворяющее неравенству<br>$\lvert 2x-1\rvert < 1$ |
| 8 | Найти решение неравенства<br>$\lvert x+2\rvert \geq 2x-4$ |
| 9 | Найти значение параметра, при котором уравнение<br>$x^2 - 6\lvert x\rvert + 5 = a$<br>имеет три корня |
| 10 | Решить систему уравнений<br>$\begin{cases} \lvert y-5\rvert = 3-x \\ \lvert x-1\rvert = y-5 \end{cases}$ |

**Уравнения и неравенства с модулем** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\lvert x-1\rvert = 2$ |
| 2 | Решить уравнение $\lvert 3+2x\rvert = 3x-2$ |
| 3 | Решить уравнение $\lvert\lvert 2x-1\rvert - x\rvert = 4x-2$ |
| 4 | Решить уравнение $\lvert x^2+x-3\rvert = x$ |
| 5 | Найти наименьший корень $(x+3)(\lvert x\rvert-3) = -4$ |
| 6 | Решить уравнение $\lvert x\rvert + \lvert x-3\rvert = 5$ |
| 7 | Найти наибольшее $x$, удовлетворяющее неравенству $\lvert 2-x\rvert \le 4$ |
| 8 | Найти решение неравенства $\lvert x-3\rvert > 4-x$ |
| 9 | Найти значение параметра, при котором уравнение $\lvert 3x^2+ax\rvert = -\frac{a}{6}$ имеет два корня |
| 10 | Решить систему уравнений $\begin{cases} \lvert x+1\rvert + \lvert y-2\rvert = 4 \\ \lvert x+1\rvert = 3y-6 \end{cases}$ |

**Уравнения и неравенства с модулем** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\{-1; 4\}$ | $\{1; 1{,}5\}$ | $\{-1{,}5; 2\}$ | $\{-1; 3\}$ |
| **2** | $-3$ | $-1$ | 6 | 5 |
| **3** | 1 | $\{-2; 4\}$ | 5 | $\frac{3}{5}$ |
| **4** | $\{1; -\sqrt{3}\}$ | $\{-2; -2\sqrt{2}\}$ | $\{1; 5\}$ | $\{1; \sqrt{3}\}$ |
| **5** | $-4$ | $-9$ | $-3$ | $-5$ |
| **6** | $\left\{-\frac{4}{3}; 0\right\}$ | $\{-5; 6\}$ | $\left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$ | $\{-1; 4\}$ |
| **7** | 3 | 2 | 0 | 4 |
| **8** | $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$ | $(-\infty; -2) \cup [2; \infty)$ | $(-\infty; 6]$ | $(3{,}5; \infty)$ |
| **9** | 9 | 4 | 1 | $(-2; 0)$ |
| **10** | $(-3; -1)$ | $(-3; 2)$ | $(2; 6)$ | $(2; 3) \cup (-4; 3)$ |

# 4 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

## *4.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

Иррациональные уравнения решаются сведением к рациональным при помощи возведения в нужную степень и исключением радикала. При этом возможно появление посторонних корней, которые исключаются при помощи проверки.

При $n \in N$

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Решение иррациональных неравенств осуществляется сведением их к равносильным системам рациональных неравенств.

При $n \in N$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^{2n} \end{cases} \end{array} \right. ;$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^{2n} \end{cases} .$$

Замечание. При наличии кубических корней рекомендуется делать замену переменной: $\sqrt[3]{f(x)} = t$.

## *4.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3$.

*Решение.*

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+3}=3-\sqrt{x-3} \quad \Rightarrow$$
$$2\text{x} + 3 = 9 - 6\sqrt{x-3}+x-3 \ \Leftrightarrow \quad x-3=-6\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}+6)=0 \quad \Rightarrow \quad x=3.$$

Проверка. $\sqrt{6+3}+\sqrt{0}=\sqrt{9}=3.$

*Ответ*: 3.

2. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2}=x+1$.

*Решение.*

$$\sqrt{5-\text{x}^2}=\text{x}+1 \Rightarrow 5-\text{x}^2=x^2+2x+1 \ \Leftrightarrow \ \text{x}^2+x-2=0 \ \Rightarrow \ x_1=1;\ x_2=-2.$$

Проверка.

1) $x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5-1}-(1+1)=0;$

2) $x=-2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5-4}-(-2+1)=2\neq 0.$

*Ответ*: 1.

3. Решите уравнение $\sqrt{7-x}-\sqrt{10-3x}=1$.

*Решение.*

$$\sqrt{7-x}-\sqrt{10-3x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{7-x}=1+\sqrt{10-3x} \quad \Rightarrow$$
$$7-x=1+2\sqrt{10-3x}+10-3x \quad \Leftrightarrow \quad 2-4x=\sqrt{10-3x} \quad \Leftrightarrow \quad x-2=\sqrt{10-3x}$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+4=10-3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3;\ x_2=-2.$$

Проверка.

1) $x = 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7-3}-\sqrt{10-9}=1.$

2) $x=-2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7+2}-\sqrt{10+6}\neq 1.$

*Ответ*: 3.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=1.$

*Решение.*

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{(2+x)-(2-x)}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2+x}}{2x}=1 \Rightarrow \sqrt{2+x}=x \Rightarrow 2+x=x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2;\ x_2=-1.$$

Проверка.

1) $x = 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{2+2}+\sqrt{2-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+2}-\sqrt{2-2}}=1;$

2) $x=-1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2-1}+\sqrt{2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-1}-\sqrt{2+1}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}=$

$$=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2}{-2}\neq 1.$$

*Ответ*: 2 .

5. Решите уравнение $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}=4$.

*Решение.*

Введем новую переменную $\sqrt{\dfrac{x+9}{x}}=t>0$. Тогда

$$t + 4/t = 4 \quad \Rightarrow \quad t^2-4t+4=0 \quad \Rightarrow \quad (t-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad t=2\ .$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\sqrt{\frac{x+9}{x}}=2 \Rightarrow \frac{x+9}{x}=4 \Rightarrow \quad x+9=4x \quad \Rightarrow \quad x=3.$$

Проверка.

$$\sqrt{1+\frac{9}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{3+9}}=4.$$

*Ответ*: 3.

6. Решите уравнение $x=\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}-2$.

*Решение.*

$$\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}=x+2 \;\Rightarrow\; 4+x\sqrt{36+x^2}=x^2+4x+4 \;\Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{36+x^2}=x(x+4) \;\Leftrightarrow\; x=0 \cup \sqrt{36+x^2}=x+4 \;\Rightarrow$$

$$36+x^2=x^2+8x+16 \quad\Rightarrow\quad 8x=20 \quad\Rightarrow\quad x=5/2\,.$$

Проверка.

1) $x = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{4+0\sqrt{36+0^2}}-2=0$;

2) $x = 5/2 \;\Rightarrow\; \sqrt{4+\frac{5}{2}\sqrt{36+\left(\frac{5}{2}\right)^2}}-2=\sqrt{4+\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{2}}-2=\frac{5}{2}$.

*Ответ*: 0; 5/2.

7. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+1}=-2x-5$.

*Решение.*

$$\sqrt{x^2+2x+1}=-2x-5 \;\Leftrightarrow\; |x+1|=-2x-5.$$

Необходимо рассмотреть два случая:

1) $x < -1 \quad\Rightarrow\quad -(x+1)=-2x-5 \quad\Rightarrow\quad x=-4$;

2) $x \ge -1 \quad\Rightarrow\quad x+1=-2x-5 \quad\Rightarrow\quad x=-2$, что противоречит условию $x \ge -1$.

*Ответ*: – 4.

8. Решите уравнение $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

*Решение.*

Пусть $\sqrt{x^2+5x+1}=t \ge 0$, тогда $3t^2+2t=5 \;\Rightarrow\; 3t^2+2t-5=0 \;\Rightarrow$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{-2\pm 8}{6}=\left[\begin{array}{l}1\\ -10/3.\end{array}\right.$$

Значение –10/3 не удовлетворяет условию $t \ge 0$.

Возвращаясь к переменной $x$, получим:

$$x^2+5x+1=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+5x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0;\ x_2=-5.$$

*Ответ*: 0, –5.

9. Решите уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

*Решение.*

Полагая $3x^2+5x+1=t\geq 0$, получим:

$$\sqrt{t+7}=1+\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad t+7=1+2\sqrt{t}+t \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{t}=6 \quad \Rightarrow \quad t=9$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+5x+1=9 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+5x-8=0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{6}=\frac{-5\pm 11}{6}=\left[\begin{array}{l}1\\ -8/3\end{array}\right. .$$

Проверка.

1) $x=1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3\cdot 1^2+5\cdot 1+1+7}-\sqrt{3\cdot 1^2+5\cdot 1+1}=\sqrt{9+7}-\sqrt{9}=1;$

2) $x=-8/3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3\cdot\frac{64}{9}+5\frac{8}{3}+1+7}-\sqrt{3\cdot\frac{64}{9}+5\frac{8}{3}+1}=\sqrt{9+7}-\sqrt{9}=1;$

*Ответ*: 1; –8/3.

10. Решите уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

*Решение.*

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^3=2^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$1+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)+1-\sqrt{x}=8.$$

Если x является корнем исходного уравнения, то сумму $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ можно заменить на 2. Тогда получим:

$$1+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\cdot 2+1-\sqrt{x}=8 \quad \Leftrightarrow$$

$$2+3\sqrt[3]{1-x}\cdot 2=8 \quad \Rightarrow \quad 6\sqrt[3]{1-x}=6 \quad \Rightarrow \quad 1-x=1 \quad \Rightarrow \quad x=0.$$

Проверка.

$\sqrt[3]{1+\sqrt{0}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{0}}=1+1=2$ .

*Ответ*: 0.

11. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

*Решение.*

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x+1+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)+3x+1=x-1.$$

Если x является корнем исходного уравнения, то сумму $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ можно заменить на $\sqrt[3]{x-1}$. Тогда получим:

$$3x+3+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=0 \Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)})=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ (x+1)^2=(3x+1)(1-x) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=0. \end{array}\right.$$

Проверка.

1) $x=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1+1}+\sqrt[3]{-3+1}=\sqrt[3]{-1-1}$;

2) $x=0 \Rightarrow \sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{0+1}\neq\sqrt[3]{0-1}$.

*Ответ*: $-1$.

12. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x}<4-x$.

*Решение*.

$$\sqrt{x^2-3x}<4-x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-3x<(4-x)^2 \\ x^2-3x\geq 0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x<16-8x+x^2 \\ x^2-3x\geq 0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-16<0 \\ x(x-3)\geq 0 \\ 4-x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x\in(-\infty,\ 0]\cup[3,\ 16/5).$$

$$\Rightarrow$$

*Ответ*: $(-\infty,\ 0]\cup[3;\ 16/5)$.

13. Решите неравенство $\sqrt{13-3x}>x-1$.

*Решение*.

$$\sqrt{13-3x}>x-1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13-3x>(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13-3x>x^2-2x+1 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x-12<0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+4)(x-3)<0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4<x<3 \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 13/3 \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leq x<3 \\ x<1 \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty,\ 3).$$

*Ответ*: $(-\infty, 3)$.

14. Решите неравенство $(x^2-9)\sqrt{x-1} \le 0$.

*Решение.*

$$(x^2-9)\sqrt{x-1} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-9 \le 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1, 3].$$

*Ответ*: [1; 3].

15. Решите неравенство $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} < 0$.

*Решение.*

Введением новой переменной $t = \sqrt{x} \ge 0$ сводим исходное неравенство к рациональному неравенству:

$$\frac{t^2+t-2}{t^2-t-2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t+2)(t-1)}{(t-2)(t+1)} < 0.$$

Решая его методом интервалов, получаем $t \in (1, 2)$. Возвращаясь к переменной $x$, находим $x \in (1, 4)$.

*Ответ*: (1; 4).

16. Решите неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} < 7$.

*Решение.*

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} < 7 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ x+3+2\sqrt{(3x-2)(x+3)}+3x-2 < 49 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ \sqrt{(3x-2)(x+3)} < 24-2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ (3x-2)(x+3) < (24-2x)^2 \\ 24-2x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ x^2-103x+582 > 0 \\ 12-x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ (x-97)(x-6) > 0 \\ 12-x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge 2/3 \\ (x<6) \vee (x>97) \\ x < 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x \in [2/3, 6).$$

*Ответ*: [2/3; 6).

17. Решите неравенство $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x} \ge \sqrt{3-x}$.

*Решение.*

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}\ge\sqrt{3-x}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x+3\ge 0\\ x\ge 0\\ 3-x\ge 0\\ 2x+3\ge(\sqrt{x}+\sqrt{3-x})^2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x+3\ge 0\\ x\ge 0\\ 3-x\ge 0\\ \sqrt{x(3-x)}\le x\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}0\le x\le 3\\ x(3-x)\le x^2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}0\le x\le 3\\ x(2x-3)\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}0\le x\le 3\\ (x\le 0)\vee(x\ge 3/2)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3/2\le x\le 3\end{array}\right.$$

*Ответ*: $\{0\}\cup[3/2;\,3]$.

Замечание. Решая уравнение с параметром, необходимо сначала выразить неизвестную величину через параметр, затем сделать проверку, анализируя полученные выражения для каждого допустимого значения параметра.

18. Решите уравнение $\sqrt{x^2+1+x\sqrt{x-a}}-1=x$.

*Решение.*

$$\sqrt{x^2+1+x\sqrt{x-a}}=x+1\ \Rightarrow\ x^2+1+x\sqrt{x-a}=x^2+2x+1\ \Rightarrow$$
$$x\sqrt{x-a}=2x\ \Rightarrow x(\sqrt{x-a}-2)=0\ \Rightarrow\ x_1=0;\ x_2=4+a.$$

Проверка.

1. При $x=0$ левая часть исходного уравнения имеет вид:

$$\sqrt{0+1+0\sqrt{0-a}}-1.$$

Это выражение имеет смысл и равно 0 только при $a\le 0$.

2. При $x=4+a$ левая часть исходного уравнения может быть преобразована к виду:

$$\sqrt{(4+a)^2+1+(4+a)\sqrt{4+a-a}}-1=$$
$$=\sqrt{16+8a+a^2+1+8+2a}-1=\sqrt{a^2+10a+25}-1=$$
$$=\sqrt{(a+5)^2}-1=|a+5|-1=\begin{cases}a+5-1=a+4, & a\ge -5\\ -a-5-1=-a-6, & a<-5.\end{cases}$$

*Ответ*: $\begin{cases}0 & \text{при } a\in(-\infty,-5);\\ 0;\ a+4 & \text{при } a\in[-5,\,0];\\ a+4 & \text{при } a\in(0,+\infty).\end{cases}$

19. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{a-\sqrt{x^2+ax}}=\sqrt{a}$.

*Решение.*

$$\sqrt{x}+\sqrt{a-\sqrt{x^2+ax}}=\sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a-\sqrt{x^2+ax}}=\sqrt{a}-\sqrt{x} \quad \Rightarrow$$

$$a-\sqrt{x^2+ax}=a-2\sqrt{ax}+x \;\Rightarrow\; \sqrt{x}\sqrt{x+a}=\sqrt{x}(2\sqrt{a}-\sqrt{x}) \quad \Rightarrow$$

$$(\mathrm{x}=0)\cup(\sqrt{x+a}=2\sqrt{a}-\sqrt{x}).$$

$$\sqrt{x+a}=2\sqrt{a}-\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x+a=4a-4\sqrt{ax}+x \;\Rightarrow\; 4\sqrt{ax}=3a \;\Rightarrow x=\frac{9}{16}a.$$

Проверка.

1. При $x$ = 0 левая часть исходного уравнения имеет вид:

$$0+\sqrt{a-0}\,.$$

Это выражение имеет смысл и равно $\sqrt{a}$ только при $a \ge 0$.

2. При $x=\dfrac{9}{16}a$ левая часть исходного уравнения может быть преобразована к виду:

$$\frac{3}{4}\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{\frac{81}{256}a^2+\frac{9}{16}a^2}}=\frac{3}{4}\sqrt{a}+\sqrt{a-\frac{15}{16}a}=\frac{3}{4}\sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{a}\,.$$

Это выражение имеет смысл и равно $\sqrt{a}$ только при $a \ge 0$.

*Ответ*: $\begin{cases} \varnothing & \text{при } a\in(-\infty;\,0); \\ 0;\ 9a/16 & \text{при } a\in[0;\,+\infty). \end{cases}$

## *4.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

Решите уравнения.

1. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+3}=6.$

   *Ответ*: 6.

2. $\sqrt{17-x^2}=3-x.$

   *Ответ*: –1.

3. $\sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}}=2.$

   *Ответ*: 1.

4. $\sqrt{\dfrac{3x-5}{x-2}}+1=6\sqrt{\dfrac{x-2}{3x-5}}.$

   *Ответ*: 3.

5. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7.$

   *Ответ*: 6.

6. $\sqrt[3]{30-x}+\sqrt[3]{5+x}=5.$

   *Ответ*: 3; 22.

7. $\sqrt[3]{5+x}-\sqrt{x-2}=1.$

   *Ответ*: 3.

8. $\sqrt{x^2+x-1}+x=2.$

   *Ответ*: 1.

9. $x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+8}=12.$

   *Ответ*: –2; 4.

10. $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1.$

    *Ответ*: –9/2; 2.

Решите неравенство.

11. $\sqrt{1-x}<x.$

    *Ответ*: $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right].$

12. $\sqrt{x^2-4x}<x-3.$

    *Ответ*: [4; 9/2).

13. $\sqrt{24-10x}>3-4x.$

    *Ответ*: (–5/8; 12/5].

14. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3.$

    *Ответ*: [4/5; 1).

15. $\sqrt{3x^2+5x-2}\le x+2.$

    *Ответ*: $\{-2\}\cup[1/3;\,3/2)$.

16. $(x^2-x-6)\sqrt{5x-x^2}>0.$

    *Ответ*: (3; 5).

17. $\sqrt{4-x}\le\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}.$

    *Ответ*: [17/5; 4].

18. $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{8-4x-x^2}}\ge 0.$

    *Ответ*: $[-3;\,-2+2\sqrt{3})$.

19. Решите уравнение $\dfrac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1.$

    *Ответ*: $\begin{cases}\varnothing & \text{при } a\in(-\infty,\,2];\\ a^2-4a & \text{при } a\in(2,\,+\infty).\end{cases}$

20. Решите уравнение $\dfrac{a}{\sqrt{x}+7} = \sqrt{x} - 7$.

*Ответ*: $\begin{cases} \varnothing & \text{при } a \in (-\infty, -49); \\ a + 49 & \text{при } a \in [-49, +\infty). \end{cases}$

## 4.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

**Иррациональные уравнения** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение $\sqrt{x+1}=11-x$ |
| 2 | Решить уравнение $\sqrt{4-2x-x^2}=x+2$ |
| 3 | Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$ |
| 4 | Решить уравнение $2\sqrt{x+1}-\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}+7=0$ |
| 5 | Найти сумму корней или корень, если он единственный $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$ |
| 6 | Решить уравнение $\sqrt{6-2x-4x^2}-\sqrt{4x^2+2x-1}=1$ |
| 7 | Решить уравнение $(x^2+4x)\sqrt{x-3}=0$ |
| 8 | Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}=1$ |
| 9 | Найти сумму целых корней уравнения $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$ |
| 10 | Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ |

**Иррациональные уравнения** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\sqrt{12-x}=x$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$2+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+1}$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$10\sqrt{x+3}+17=\dfrac{6}{\sqrt{x+3}}$ |
| 5 | Найти сумму корней или корень, если он единственный<br>$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$ |
| 7 | Решить уравнение<br>$\sqrt{x-1}(x^2+x)=0$ |
| 8 | Решить уравнение<br>$\sqrt[3]{20+x}-\sqrt[3]{x-8}=4$ |
| 9 | Найти сумму целых корней уравнения<br>$\sqrt{x^2-2x+1}+2\sqrt{x^2+6x+9}=5$ |
| 10 | Решить уравнение<br>$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ |

**Иррациональные уравнения** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\sqrt{x+1}=x-5$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$25\sqrt{x-3}-22=\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$ |
| 5 | Найти сумму корней или корень, если он единственный<br>$(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\sqrt{24-2x-x^2}-\sqrt{x^2+2x-4}=2$ |
| 7 | Решить уравнение<br>$(x^2+3x)\sqrt{2+x}=0$ |
| 8 | Решить уравнение<br>$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$ |
| 9 | Найти сумму целых корней уравнения<br>$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{4x^2-4x+1}=8$ |
| 10 | Решить уравнение<br>$\sqrt[3]{x+1}+1=\sqrt{x+2}$ |

**Иррациональные уравнения** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Решить уравнение<br>$\sqrt{1+5x}=1-x$ |
| 2 | Решить уравнение<br>$\sqrt{1-2x-x^2}=x^2+1$ |
| 3 | Решить уравнение<br>$\sqrt{x+4}-\sqrt{x}=2$ |
| 4 | Решить уравнение<br>$4\sqrt{x-5}=\dfrac{13}{\sqrt{x-5}}-9$ |
| 5 | Найти сумму корней или корень, если он единственный<br>$4\sqrt{x^2-4x+8}=x^2-4x+3$ |
| 6 | Решить уравнение<br>$\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1$ |
| 7 | Решить уравнение<br>$(x^2-x)\sqrt{x-2}=0$ |
| 8 | Решить уравнение<br>$\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$ |
| 9 | Найти сумму целых корней уравнения<br>$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=5$ |
| 10 | Решить уравнение<br>$\sqrt{2x-1}=\sqrt[3]{4x+7}$ |

**Иррациональные уравнения** **Ответы**

| № варианта / № задания | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 3 | 8 | 0 |
| **2** | 0 | 3 | 3 | 0 |
| **3** | 7 | 8 | 5 | 0 |
| **4** | –0,75 | –2,91 | 4 | 6 |
| **5** | 2; –4<br>2–4 = –2 | –5+0=–5 | –7+2 = –5 | 4 |
| **6** | –1; 0,5 | –2; 1 | –4; 2 | –6; 1 |
| **7** | 3 | 1 | –2; 0 | 2 |
| **8** | 2 | –19,7 | 1 | 0; 7 |
| **9** | 0 | $-\frac{16}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | [–2; 3]<br>3 |
| **10** | 3 | 1; 2; 10 | –1; 7; –2 | 5 |

## *КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛАМ 2, 3, 4*

### *ТЕСТ 1*

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что для всех $x$ справедливо равенство $\left\|x\right\|^2 - \left\|x^2\right\| = 0$? |
| 2 | Верно ли, что найдется значение $a$, при котором 1 является корнем уравнения $ax^2 + 1 = 0$? |
| 3 | Верно ли, что найдется значение $a$, при котором 1 является корнем уравнения $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$? |
| 4 | Верно ли, что уравнения $x - 1 = 3 - x$ и $(x-1)^2 = (3-x)^2$ равносильны? |
| 5 | Верно ли, что уравнения $x + 1 = 0$ и $(x+1)(\left\|x\right\| + 1) = 0$ равносильны? |
| 6 | Верно ли, что уравнение $x^4 + \left\|x\right\| = 0$ имеет единственное решение? |
| 7 | Верно ли, что уравнение $\frac{x^2}{4} + x = -1$ имеет хотя бы одно решение? |
| 8 | Верно ли, что уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$ при $a < 0$ имеет более одного решения? |
| 9 | Верно ли, что при $a > 0$ существует такое положительное число $x$, при котором справедливо $\frac{a}{x} > 1$? |
| 10 | Верно ли, что при $a > 0$ существует такое положительное число $x$, при котором справедливо $\frac{x}{a} < a$? |
| 11 | Верно ли, что для любого $0 < A < 1$ справедливо $A^2 > A$? |
| 12 | Верно ли, что для любого $A < -1$ справедливо $A^3 > A$? |
| 13 | Верно ли, что не существует значение $x$, удовлетворяющее условию $\left\|x\right\| \le 1$, при котором справедливо $\left\|x^2 - x\right\| \le 1$? |
| 1 | 2 |
| 14 | Верно ли, что для любого $x$ справедливо неравенство $x^2 + 1 > \left\|x\right\|$? |
| 15 | Верно ли, что для любого $x$ справедливо неравенство |

| | |
|---|---|
| | $x > -\|x\|$? |
| 16 | Верно ли, что неравенство $\frac{a-1}{x-3} > 0$ справедливо для всех $\|a\| < 2$? |
| 17 | Верно ли, что неравенство $\|x+1\| - x > 1$ справедливо для любых $x$? |
| 18 | Верно ли, что существует такое положительное $x$, при котором справедливо неравенство $x - \|x\| > 1$? |
| 19 | Верно ли, что если $b^2 > a^2$, то $b > a$? |
| 20 | Верно ли, что решения неравенства $\|x-1\| < 2$ образуют конечный промежуток? |
| 21 | Верно ли, что решения неравенства $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ образуют конечный промежуток? |
| 22 | Верно ли, что при любом значении $a$, найдется значение $x$, при котором справедливо неравенство $x^2 + ax + 1 \geq 0$? |
| 23 | Верно ли, что при любом $a \neq 0$, найдется значение $x$, при котором справедливо неравенство $ax^2 + x + 1 < 0$? |
| 24 | Верно ли, что при любом значении $a > 0$, найдется такое значение $x$, при котором справедливо неравенство $ax^2 + x + a > 0$? |
| 25 | Верно ли, что решения неравенства $\frac{x+5}{x+1} \leq 0$ образуют конечный промежуток? |
| 26 | Верно ли, что решения неравенства $\frac{x^4}{7-x} < 0$ образуют конечный промежуток? |
| 27 | Верно ли, что решения неравенства $1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$ образуют конечный промежуток? |
| 28 | Верно ли, что решения неравенства $0 \leq \frac{x^2-1}{x-1} \leq 3$ образуют конечный промежуток? |
| 29 | Верно ли, что система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$ имеет положительное решение? |
| 30 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система |

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} y = x+1 \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет единственное решение? |
| 31 | Верно ли, что система $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение при $a = 2$? |
| 32 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ ax-1 \ge 0 \end{cases}$ имеет решение, принадлежащее отрезку [1;1]? |
| 33 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система $\begin{cases} \lvert x \rvert \ge 1 \\ x \le a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение? |
| 34 | Верно ли, что множество $\{-2,-1,0,1,2\}$ содержит все решения уравнения $\sqrt{2-2x} = x-1$? |
| 35 | Верно ли, что уравнение $1+\sqrt{x+1} = -\sqrt{x}$ не имеет корней? |
| 36 | Верно ли, что уравнение $\sqrt{x^2-2} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-2}}$ имеет два решения? |
| 37 | Верно ли, что неравенство $(3-x)\sqrt{x-2} > 0$ не имеет целого решения? |
| 38 | Верно ли, что неравенство $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}} < 0$ имеет два целых решения? |
| 39 | Верно ли, что неравенство $\sqrt{x-1} \le \sqrt{x-2}$ не имеет решения? |
| 40 | Верно ли, что неравенство $\sqrt{x+1}(x^2+3x+2) \le 0$ не имеет решения? |

## *ТЕСТ 2*

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что для всех $x$ справедливо равенство $\lvert x^2+x\rvert - x^2 - x = 0$? |
| 2 | Верно ли, что найдется значение $a$, при котором 1 является корнем уравнения $x^2 - ax = 0$? |
| 3 | Верно ли, что найдется значение $a$, при котором 1 является корнем уравнения $ax^2 + ax + 1 = 0$? |
| 4 | Верно ли, что уравнения $x^2+1=1$ и $(x^2+1)^2=1$ равносильны? |
| 5 | Верно ли, что уравнения $\lvert x-3\rvert = \lvert 1-x\rvert$ и $(x-3)^2=(x-1)^2$ равносильны? |
| 6 | Верно ли, что уравнение $\lvert x^2 - x\rvert = 0$ имеет единственное решение? |
| 7 | Верно ли, что уравнение $x - x^2 = 2$ имеет хотя бы одно решение? |
| 8 | Верно ли, что уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$ имеет только положительное решение для всех допустимых значений $a$? |
| 9 | Верно ли, что при $a>0$ существует такое положительное число $x$, при котором справедливо $\frac{a}{x} < -1$? |
| 10 | Верно ли, что при $a>0$ существует такое положительное число $x$, при котором справедливо $\frac{a}{x} > x$? |
| 11 | Верно ли, что для любого $0<A<1$ справедливо $-1<-A<0$? |
| 12 | Верно ли, что для любого $A<-1$ справедливо $\lvert A\rvert > 1$? |
| 13 | Верно ли, что не существует значение $x$, удовлетворяющее условию $\lvert x\rvert \le 1$, при котором справедливо $\lvert x-1\rvert + \lvert x+1\rvert > 2$? |
| 14 | Верно ли, что для любого $x$ справедливо неравенство $\lvert x+1\rvert \le \lvert x\rvert + 1$? |
| 15 | Верно ли, что для любого $x$ справедливо неравенство |

| | |
|---|---|
| | $x^2 < \|x\|^2$? |
| 16 | Верно ли, что неравенство $\frac{a-1}{x-3} > 0$ справедливо для всех $1 < a < 3$? |
| 17 | Верно ли, что неравенство $2\|x\| - x^2 \le 1$ справедливо для любых $x$? |
| 18 | Верно ли, что существует такое положительное $x$, при котором справедливо неравенство $1 + \|x\| \le 1$? |
| 19 | Верно ли, что если $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, то $b > a$? |
| 20 | Верно ли, что решения неравенства $\|x+1\| > 1$ образуют конечный промежуток? |
| 21 | Верно ли, что решения неравенства $x^2 + x - 2 < 0$ образуют конечный промежуток? |
| 22 | Верно ли, что при любом значении $a$, найдется значение $x$, при котором справедливо неравенство $x^2 + ax + 1 < 0$? |
| 23 | Верно ли, что при любом $a \neq 0$, найдется значение $x$, при котором справедливо неравенство $ax^2 + x + 1 \ge 0$? |
| 24 | Верно ли, что при любом значении $a > 0$, найдется такое значение $x$, при котором справедливо неравенство $ax^2 + x + a \le 0$? |
| 25 | Верно ли, что решения неравенства $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{x-5}$ образуют конечный промежуток? |
| 26 | Верно ли, что решения неравенства $\frac{1-x}{3-x} < 0$ образуют конечный промежуток? |
| 27 | Верно ли, что решения неравенства $0 \le \frac{2x-1}{x+2} \le 1$ образуют конечный промежуток? |
| 28 | Верно ли, что решения неравенства $1 \le \frac{x^3+1}{x+1} \le 2$ образуют конечный промежуток? |
| 29 | Верно ли, что система $\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ имеет положительное решение? |

| | |
|---|---|
| 30 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система $\begin{cases} y = x+1 \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет два отрицательных решения? |
| 31 | Верно ли, что система $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение при $a = -1$? |
| 32 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ ax - 1 \geq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение? |
| 33 | Верно ли, что существует значение $a$, при котором система $\begin{cases} \lvert x \rvert \geq 1 \\ x \leq a^2 \end{cases}$ не имеет решения? |
| 34 | Верно ли, что множество $\{-2,-1,0,1,2\}$ содержит все решения уравнения $\sqrt{6-3x} = x-2$? |
| 35 | Верно ли, что уравнение $\sqrt{x-2} + 2 = -\sqrt{4-x}$ не имеет корней? |
| 36 | Верно ли, что уравнение $\sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ имеет два решения? |
| 37 | Верно ли, что неравенство $(2-x)\sqrt{x-1} < 0$ не имеет целого решения? |
| 38 | Верно ли, что неравенство $\dfrac{x-2}{\sqrt{3-x}} \geq 0$ имеет два целых решения? |
| 39 | Верно ли, что неравенство $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{x}$ не имеет решений? |
| 40 | Верно ли, что неравенство $\sqrt{x-1}(x^2 - x) < 0$ не имеет решений? |

## Ответы к тестам

| Тест 1 | | | | Тест 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ |
| **1** | да | **21** | да | **1** | нет | **21** | да |
| **2** | да | **22** | да | **2** | да | **22** | нет |
| **3** | да | **23** | нет | **3** | да | **23** | да |
| **4** | да | **24** | да | **4** | да | **24** | нет |
| **5** | да | **25** | да | **5** | да | **25** | да |
| **6** | да | **26** | нет | **6** | нет | **26** | да |
| **7** | да | **27** | да | **7** | нет | **27** | да |
| **8** | да | **28** | нет | **8** | нет | **28** | нет |
| **9** | да | **29** | нет | **9** | нет | **29** | нет |
| **10** | да | **30** | да | **10** | да | **30** | нет |
| **11** | нет | **31** | нет | **11** | да | **31** | нет |
| **12** | нет | **32** | да | **12** | да | **32** | да |
| **13** | нет | **33** | нет | **13** | да | **33** | нет |
| **14** | да | **34** | да | **14** | да | **34** | да |
| **15** | нет | **35** | да | **15** | нет | **35** | да |
| **16** | нет | **36** | да | **16** | нет | **36** | да |
| **17** | нет | **37** | да | **17** | да | **37** | да |
| **18** | нет | **38** | да | **18** | нет | **38** | нет |
| **19** | нет | **39** | да | **19** | нет | **39** | да |
| **20** | да | **40** | нет | **20** | нет | **40** | да |

# 5 ПРОЦЕНТЫ, ПРОПОРЦИИ, ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

## *5.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

### ПРОПОРЦИИ

$$(a,b,c,d\neq 0),\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc;\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

### Производные пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};\quad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d};$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

### ПРОЦЕНТЫ

Процент, % – 1 сотая часть числа.

Если число $b$ составляет $p$% от числа $a$, то

$$\begin{matrix} a-100\% \\ b-p\% \end{matrix}\Rightarrow b=\frac{a\cdot p}{100}.$$

### Сложный процент

При $n$ последовательных изменениях исходной величины $x_0$ на одно и то же число процентов $P$%, с учетом начисления «процента на процент» результат определяется по формуле:

$$x=x_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^n.$$

### СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

**Среднее арифметическое** чисел $a_1,a_2,...,a_n$:

$$m_1=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

**Среднее геометрическое** неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$m_2 = +\sqrt[n]{a_1, a_2, ..., a_n}\ .$$

**Среднее гармоническое** положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$m_3 = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}.$$

**Среднее квадратическое** неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$m_4 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}\ .$$

## ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

### Задачи "на движение"

Исходными величинами при составлении уравнений в задачах “на движение” являются параметры движения объектов – расстояние, скорость, время движения. При решении таких задач полезно составить иллюстративный чертеж, схематически отображающий условия задачи. В качестве базовых здесь можно рассматривать два случая.

1. Из пунктов, находящихся на расстоянии $S$ один от другого, навстречу друг другу двигаются два объекта со скоростями $V_1$ и $V_2$ до встречи в момент времени $T$. В этом случае $T = \dfrac{S}{V_1 + V_2}$.

2. Из этих же пунктов два объекта двигаются со скоростями $V_1$ и $V_2$ ($V_1 > V_2$) в одном направлении до момента времени $T$, когда один объект догонит другой. В этом случае $T = \dfrac{S}{V_1 - V_2}$.

### Задачи "на работу"

Задачи, связанные с выполнением какой-либо работы, аналогичны задачам на "движение". При этом весь объем работы соответствует расстоянию, а производительность объектов, совершающих работу, – скорости.

### Задачи "на проценты"

К задачам "на проценты" относятся задачи, в которых одна из величин изменяется поэтапно, причем изменение определяется значением, которое величина имела в начале этапа, и задается в процентах, то есть в сотых долях значения величины в начале этапа. Значение величины $Q$ в конце этапа связано со значением величины $Q_0$ в начале этапа равенством

$$Q = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = Q_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}),$$

где $p$ – изменение значения величины на данном этапе, %.

### Задачи "на смеси"

Стандартным приемом решения задач "на смеси" является определение количества искомого компонента по заданной концентрации.

### Задачи с целыми неизвестными

В задачах этого типа условие целочисленности неизвестных величин дает возможность составить дополнительное уравнение или неравенство, необходимое для нахождения единственного решения.

## *5.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

1. Пешеход и велосипедист отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 48 км, и встретились через 1 ч 36 мин после начала движения. Определите скорости велосипедиста и пешехода, если известно, что на весь путь велосипедист потратил на 6 часов меньше, чем пешеход.

*Решение.*

Обозначим: $V_1$ и $V_2$ – скорости велосипедиста и пешехода.

**СОСТАВИМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ, КОТОРАЯ ИМЕЕТ ВИД:**

$$\begin{cases}(V_1+V_2)\cdot 1{,}6=48\\ \dfrac{48}{V_2}-\dfrac{48}{V_1}=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}V_1+V_2=30\\ 8\cdot(V_1-V_2)=V_1V_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}V_2=30-V_1\\ V_1^2-14V_1-240=0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: 24 и –10, второй из которых не подходит по смыслу задачи.

*Ответ*: 24 км/ч; 6 км/ч.

2. Два туриста одновременно отправились из пункта $A$ в пункт $B$, первый турист пешком, а второй – на мотоцикле с водителем. Проехав часть пути, второй турист пошел дальше пешком, а мотоциклист возвратился, взял первого туриста, и оба туриста прибыли в пункт $B$ одновременно. Найдите время, за которое туристы добрались из пункта $A$ в пункт $B$, если расстояние между ними 52 км, а скорости пешехода и мотоциклиста равны соответственно 4 и 52 км/ч.

*Решение.*

Обозначим: $V_1$ и $V_2$ – скорости пешехода и мотоциклиста;

$x$ – расстояние, которое проехал мотоциклист в обратном направлении для того, чтобы забрать первого туриста;

$y$ – путь, проделанный вторым туристом пешком;

$T$ – искомое время, ч.

Мотоциклист проехал (52 + 2$x$) км, проведя в пути время $T=\dfrac{52+2x}{52}$.

Время в пути первого туриста: $T=\dfrac{52-x-y}{V_1}+\dfrac{x+y}{V_2}=\dfrac{52-x-y}{4}+\dfrac{x+y}{52}$.

Время в пути второго туриста: $T = \frac{52-y}{V_2} + \frac{y}{V_1} = \frac{52-y}{52} + \frac{y}{4}$.

Тогда

$$\begin{cases} \frac{52-y}{52} + \frac{y}{4} = \frac{52+2x}{52} \\ \frac{52-x-y}{4} + \frac{x+y}{52} = \frac{52+2x}{52} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = x \\ 7x + 6y = 312 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 6y \\ y = 6{,}5 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 39 \text{ и } T = \frac{52 + 2\cdot 39}{52} = 2{,}5.$$

*Ответ*: 2,5 ч.

3. Поезд проходит мимо платформы длиной 350 м за 45 с, а мимо светофора за 27 с. Определите длину поезда и его скорость.

*Решение.*

Обозначим длину и скорость поезда соответственно $L$ и $V$. Заметим, что, двигаясь мимо платформы, поезд проходит расстояние, равное сумме длин платформы и поезда, двигаясь мимо светофора, – расстояние, равное длине поезда.

$$\begin{cases} \frac{L+350}{V} = 45 \\ \frac{L}{V} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 + \frac{350}{V} = 45 \\ \frac{L}{V} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \frac{350}{45-27} = \frac{175}{9} \\ L = 525. \end{cases}$$

$$V = \frac{175}{9} \text{ м/с} = 70 \text{ км/ч}.$$

*Ответ*: 525 м; 70 км/ч.

4. Из пункта $A$ выехали три велосипедиста: первый – на час раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорости каждого велосипедиста постоянны. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого; второй догнал первого на 2 ч позже, чем третий. Определите отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скоростей второго и третьего велосипедистов равно 2 : 3.

*Решение.*

Обозначим: $V_1$, $V_2$, $V_3$ – скорости велосипедистов;

$t$ – время, которое затратил третий велосипедист, чтобы догнать первого.

Приравнивая расстояния, пройденные первым и третьим велосипедистами до встречи в момент времени $t$, и расстояния, пройденные первым и вторым велосипедистами в момент времени $t + 2$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} V_3 t = V_1(t+1) \\ V_2(t+2) = V_1(t+1+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{t+3}{t+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ \dfrac{V_2}{V_3 \dfrac{t}{t+1}} = \dfrac{t+3}{t+2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ \dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{t(t+3)}{(t+1)(t+2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ \dfrac{t(t+3)}{(t+1)(t+2)} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ t^2 + 3t - 4 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: 4 и –1, второй из которых не подходит по смыслу задачи. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{t}{t+1} \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{4}{5}.$$

*Ответ*: 4 : 5.

5. Два автомобиля, двигаясь в одном направлении по кольцевой дороге с постоянными скоростями, оказываются рядом каждые 24 мин. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 мин. Определите время, за которое проходит по кольцу каждый автомобиль.

*Решение.*

Обозначим: $V_1$ и $V_2$ – скорости автомобилей ($V_1 > V_2$);

$t_1$ и $t_2$ – время, за которое автомобили проходят кольцо, мин;

$L$ – длина кольца.

При встречном движении автомобилей $\dfrac{L}{V_1 + V_2} = 8$.

При движении в одном направлении $\dfrac{L}{V_1 - V_2} = 24.$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{cases} \dfrac{L}{V_1 + V_2} = 8 \\ \dfrac{L}{V_1 - V_2} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = \dfrac{L}{8} \\ V_1 - V_2 = \dfrac{L}{24} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{L}{12} \\ V_2 = \dfrac{L}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{L}{V_1} = 12 \\ t_2 = \dfrac{L}{V_2} = 24. \end{cases}$$

*Ответ*: 12 мин; 24 мин.

6. Ремонт пути производится двумя бригадами, каждая из которых отремонтировала по 10 км, хотя вторая бригада работала на один день меньше первой. Сколько километров пути в день ремонтировала каждая бригада, если суммарно они ремонтировали в день 4,5 км пути?

*Решение.*

Обозначим: $q_1$, $q_2$ – производительности первой и второй бригад соответственно;

$t$ – время работы первой бригады.

Тогда

$$\begin{cases} q_1 t = 10 \\ q_2 (t-1) = 10 \\ q_1 + q_2 = 4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{10}{t} \\ q_2 = \dfrac{10}{t-1} \\ \dfrac{10}{t} + \dfrac{10}{t-1} = 4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{10}{t} \\ q_2 = \dfrac{10}{t-1} \\ 4{,}5t^2 - 24{,}5t + 10 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = 5$ и $t_2 = \dfrac{1}{9}$, второй из которых не подходит по смыслу задачи. Тогда $q_1 = 2$, $q_2 = 2{,}5$.

*Ответ*: 2 км; 2,5 км.

7. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на два листа больше нормы, то закончит работу на три дня раньше срока. Если она будет печатать в день на четыре листа больше нормы, то закончит работу на пять дней раньше срока. Сколько листов и в какой срок должна напечатать машинистка?

*Решение.*

Обозначим: $V$ – весь объем работы;

$q$ – производительность;

$t$ – установленный срок работы.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{V}{q} = t \\ \dfrac{V}{q+2} = t-3 \\ \dfrac{V}{q+4} = t-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V}{q+2} = \dfrac{V}{q} - 3 \\ \dfrac{V}{q+4} = \dfrac{V}{q} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3q^2 + 6q - 2V = 0 \\ 5q^2 + 20q - 4V = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 30q - 2V = 0 \\ 3q^2 + 6q - 2V = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 15q \\ q^2 - 8q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 120 \\ q = 8. \end{cases}$$

*Ответ*: 120 листов; 8 дней.

8. Два насоса, работая одновременно, могут выкачать воду из котлована за 2 ч. Работая один, первый насос затратил бы на эту работу на 3 ч больше, чем один второй. За какое время может выполнить всю работу каждый насос?

*Решение.*

Обозначим: $V$ – объем работы;

$t_1$, $t_2$ – время, за которое каждый из насосов может выполнить всю работу;

$q_1$, $q_2$ – производительность первого и второго насосов соответственно.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{V}{q_1 + q_2} = 2 \\ \dfrac{V}{q_1} - 3 = \dfrac{V}{q_2} \\ t_1 = \dfrac{V}{q_1} \\ t_2 = \dfrac{V}{q_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 2(q_1 + q_2) \\ \dfrac{V}{q_1} - 3 = \dfrac{V}{q_2} \\ t_1 = \dfrac{V}{q_1} \\ t_2 = \dfrac{V}{q_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q_1}{V} + \dfrac{q_2}{V} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{V}{q_1} - 3 = \dfrac{V}{q_2} \\ t_1 = \dfrac{V}{q_1} \\ t_2 = \dfrac{V}{q_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{2} \\ t_1 - 3 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_1 - 3} = \dfrac{1}{2} \\ t_1 - 3 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 - 7t_1 + 6 = 0 \\ t_2 = t_1 - 3. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: 6 и $-1$, второй из которых не подходит по смыслу задачи.

*Ответ*: 6 ч; 3 ч.

9. Денежная сумма $Q$ положена в банк под $p$ % годовых на $n$ лет. Определите, какая сумма будет выплачена вкладчику по истечении этого срока.

*Решение*.

**ПОСЛЕ ПЕРВОГО ГОДА СУММА ВКЛАДА УВЕЛИЧИТСЯ НА *P* % И СОСТАВИТ:**

$$Q_1 = Q \cdot (1 + \frac{p}{100}).$$

После двух лет сумма вклада составит:

$$Q_2 = Q_1 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = Q \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100}) = Q \cdot (1 + \frac{p}{100})^2.$$

После трех лет сумма вклада составит:

$$Q_3 = Q_2 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = Q \cdot (1 + \frac{p}{100})^3 \text{ и т.д.}$$

Через $n$ лет сумма вклада составит:

$$Q_n = Q \cdot (1 + \frac{p}{100})^n.$$

*Ответ*: $Q \cdot (1+\frac{p}{100})^n$.

Замечание. Полученная формула представляет собой правило исчисления "сложных процентов".

10. По плану предприятие должно увеличить объем производства за два года в четыре раза. Определите, каким должен быть ежегодный прирост производства в процентах, если он одинаков для каждого года.

*Решение.*

Обозначим: $Q$ – полный объем производства предприятия;

$p$ – искомый процент прироста производства.

Используя формулу сложных процентов (см. задачу 9) и учитывая, что в конце второго года объем производства должен составить $4Q$, получим:

$$4Q = Q \cdot (1+\frac{p}{100})^2 \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{p}{100} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{100} = 1 \quad \Rightarrow \quad p = 100\%.$$

*Ответ*: $100\%$.

11. Цена товара дважды увеличивалась – на 25 и на 20%, а затем была снижена на 15% и составила 510 рублей. Найдите первоначальную цену товара.

*Решение.*

Обозначим первоначальную цену товара через $Q$.

Конечная цена товара составляет 510 рублей и определяется по формуле

$$Q \cdot (1+\frac{25}{100}) \cdot (1+\frac{20}{100}) \cdot (1-\frac{15}{100}) = 510 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{510}{\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{17}{20}} = 400.$$

*Ответ*: 400 руб.

12. В результате продажи товара, уцененного на 20%, доход магазина составил 12%. Определите прибыль магазина при продаже товара по первоначальной цене.

*Решение.*

Обозначим: $Q_0$ – цена, по которой приобретен товар;

$Q$ – первоначальная цена продажи.

**В РЕЗУЛЬТАТЕ УЦЕНКИ ЦЕНА ТОВАРА СОСТАВИЛА:**

$$Q_1 = Q \cdot (1 - \frac{20}{100}) = \frac{4}{5} \cdot Q.$$

Процент прибыли при продаже уцененного товара составил:

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{12}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{4}{5} \cdot Q - Q_0}{Q_0} = \frac{12}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{Q}{Q_0} = \frac{12}{100} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q}{Q_0} = \frac{140}{100} \Rightarrow \quad Q = \frac{140}{100} \cdot Q_0.$$

Процент прибыли при продаже по первоначальной цене составил бы:

$$\frac{Q - Q_0}{Q_0} = \frac{\frac{140}{100} \cdot Q_0 - Q_0}{Q_0} = \frac{140}{100} - 1 = \frac{40}{100}.$$

*Ответ*: 40%.

13. Определите концентрацию раствора кислоты, полученного после смешивания 120 г 40%-ного раствора, 150 г 60%-ного раствора этой кислоты и 330 г воды.

*Решение*.

Количество кислоты в первом растворе $m_1 = \frac{40}{100} \cdot 120 = 48$ г.

Количество кислоты во втором растворе $m_2 = \frac{60}{100} \cdot 150 = 90$ г.

Общее количество кислоты $m = m_1 + m_2 = 48 + 90 = 138$ г.

Общий объем получившегося раствора составляет 600 г при концентрации $\frac{138 \cdot 100}{600} = 23$.

*Ответ*: 23%.

14. Один из сплавов, состоящий из двух металлов, содержит их в отношении $1:2$, а другой – $2:3$. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении $17:27$?

*Решение.*

Пусть нужно взять $x$ частей первого сплава и $y$ частей второго. В $x$ частях первого сплава будет $\frac{x}{3}$ частей одного металла и $\frac{2x}{3}$ другого, а в $y$ частях второго сплава – $\frac{2y}{5}$ и $\frac{3y}{5}$ частей соответственно. Тогда

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}}{\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}}=\frac{17}{27} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{y}+\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y}+\frac{3}{5}}=\frac{17}{27} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{9}{35}.$$

*Ответ*: 9 : 35.

15. Из 20 т руды выплавляют 10 т металла, содержащего 8% примесей. Определите процент примесей в руде.

*Решение.*

Количество примесей в 10 т металла $m_1 = 10\cdot\frac{8}{100} = 0{,}8$ т.

Количество чистого металла в 10 т металла с примесью $m_2$ = 10 –0,8=9,2 т.

Процентное содержание чистого металла в руде $\frac{9{,}2}{20}\cdot 100 = 46\%$.

Процентное содержание примесей в руде 100% – 46% = 54% .

*Ответ*: 54%.

16. Слиток из олова и свинца весом 20 кг при погружении в воду потерял 2 кг. Известно, что 10 кг олова теряют при погружении в воду $1\frac{3}{8}$ кг, а 5 кг свинца – $\frac{3}{8}$ кг. Определите процентное содержание олова и свинца в сплаве.

*Решение.*

Пусть $x$ – количество олова в слитке, тогда свинца в слитке будет (20 – $x$). 1 кг олова в воде теряет $\frac{11}{80}$ кг, 1 кг свинца – $\frac{3}{40}$ кг, а весь слиток теряет

$$x\cdot\frac{11}{80}+(20-x)\cdot\frac{3}{40}=2 \Rightarrow \ x = 8 \text{ кг.}$$

Таким образом, олова в слитке будет $\frac{8}{20}\cdot 100 = 40\%$, свинца – $60\%$ .

*Ответ*: 40% ; 60% .

17. Два раствора, первый из которых содержит 0,8 кг, а второй – 0,6 кг кислоты, слили вместе и получили 10 кг нового раствора. Найдите массу каждого раствора в смеси, если известно, что в первом растворе концентрация кислоты на 10% больше, чем во втором.

*Решение.*

Обозначим: $x$, $y$ – масса первого и второго растворов соответственно;
$q$ – концентрация кислоты во втором растворе.
Тогда $q + 0{,}1\cdot q$ – концентрация кислоты в первом растворе.

$$x=\frac{0{,}8}{q+0{,}1\cdot q}=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{q}, \quad y=\frac{0{,}6}{q}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{q}.$$

$$x + y = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{11}\cdot\frac{1}{q}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{q}=10 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{73}{550}.$$

$$x=\frac{8}{11}\cdot\frac{550}{73}=\frac{400}{73},\ y=\frac{3}{5}\cdot\frac{550}{73}=\frac{330}{73}.$$

*Ответ*: $\frac{400}{73}$ кг; $\frac{330}{73}$ кг.

18. Найдите двузначное число, если известно, что частное от деления этого числа на сумму его цифр равно 4, а произведение цифр равно 32.

*Решение.*

Обозначим через $0 < x \le 9$ и $0 \le y \le 9$ соответственно число десятков и число единиц искомого числа. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=4\\ xy=32\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x-3y=0\\ xy=32\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=y\\ xy=32\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2x\\ x^2=16.\end{cases}$$

Значение $x$ не может быть отрицательным, следовательно, $x = 4$ и $y = 8$.

*Ответ*: 48.

19. Найдите двузначное число, если известно, что при деления этого числа на сумму его цифр в частном получится 4 и в остатке 3; если из искомого числа вычесть удвоенную сумму его цифр, то получится 25.

*Решение*.

Обозначим через $0 < x \leq 9$ и $0 \leq y \leq 9$ 0 соответственно число десятков и число единиц искомого числа. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y} = 4 + \dfrac{3}{x+y} \\ 10x + y - 2(x+y) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 3 \\ 8x - y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 8x - y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7. \end{cases}$$

*Ответ*: 47.

## *5.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

1. Из порта $A$ в порт $B$ одновременно отправляются два катера. Так как скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, то он прибывает на 5 часов раньше. Найдите скорость первого катера, если расстояние от $A$ до $B$ равно 300 км.

*Ответ*: 30 км/ч.

2. Поезд был задержан на станции на 30 мин. Чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 8 км/ч и на следующем перегоне длиной 360 км ликвидировал опоздание. Определите скорость поезда до задержки на станции.

*Ответ*: 72 км/ч.

3. Два мотоциклиста выехали одновременно: один из пункта $A$ в пункт $B$, другой – из пункта $B$ в пункт $A$. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 40 км от пункта $B$, второй раз в 20 км от пункта $A$ и через 1 ч после первой встречи. Найдите расстояние между пунктами $A$ и $B$ и скорости обоих мотоциклистов.

*Ответ*: 100 км; 120 км/ч; 80 км/ч.

4. Автомат изготавливает детали двух типов. В первый день было изготовлено деталей первого типа на 100 штук больше, чем второго. Во второй день было изготовлено деталей второго типа на 150 штук больше, а первого типа на 50 штук больше, чем в первый день. Сколько деталей первого и второго типов было изготовлено в первый день, если во второй день их было произведено в 1,2 раза больше, чем в первый?

*Ответ*: 550 и 450 деталей.

5. Мощности двух кранов относятся как $2:3$. Если открыты оба крана, то бассейн заполняется за 1 ч 48 мин. Найдите время, за которое заполняется бассейн, если открыт только первый кран.

*Ответ*: 4,5 ч.

6. Два автомата, производительность которых относится как 2 : 3, изготовили партию деталей, причем первый автомат работал на 1 ч больше второго. Установите отношение деталей, изготовленных первым и вторым автоматами, если один второй автомат мог бы выполнить всю работу за 3 ч.

*Ответ*: 8 : 7.

7. Определите, через сколько лет утроится денежная сумма, сданная в банк под 7% годовых.

Указание. Результат округлите до целого числа лет.

*Ответ*: 17 лет.

8. В результате уценки цена товара была уменьшена на 10%. Определите процент прибыли магазина, если при продаже товара по первоначальной цене она планировалась в размере 20%.

*Ответ*: 8%.

9. Размер заработной платы повышался два раза, причем процент повышения во второй раз был вдвое больше, чем в первый раз. Определите, на сколько процентов увеличивалась заработная плата каждый раз, если до первого повышения она была 7 000 руб., а после второго повышения составила 9 240 руб.?

*Ответ*: 10%.

10. Имеются два бруса сплава серебра с медью. Первый содержит 35, второй – 15% меди. В каком отношении следует брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий 20% меди?

*Ответ*: 1 : 3.

11. В результате смешивания 72%-ного и 58%-ного растворов кислоты получили 62%-ный раствор. Если бы каждого раствора было взято на 15 л больше, то получился бы 63,25%-ный раствор. Сколько литров каждого раствора было взято первоначально?

*Ответ*: 12 л; 30 л.

12. Имелось 200 г 15%-ного раствора соли. К нему добавили 300 г 40%-ного раствора той же соли и 250 г чистой воды. Найдите процентное содержание соли в новом растворе.

*Ответ*: 20%.

13. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится 3, а в остатке 9. Если из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

*Ответ*: 63.

14. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 5, а в остатке 2. Найдите это число.

*Ответ*: 32.

## *5.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ*

**Пропорции** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найдите $x$, если $\dfrac{x}{\dfrac{0{,}1:0{,}05}{90}+\dfrac{2}{9}}=\dfrac{14+\dfrac{7}{4}}{\dfrac{25}{2}-\dfrac{184}{15}}$ |
| 2 | Найдите $x$, если $\dfrac{17{,}7-2{,}6:\dfrac{4}{3}}{x}=\dfrac{5-\dfrac{4}{5}\cdot 0{,}625}{\left(\dfrac{23}{5}+\dfrac{7}{3}\right):\dfrac{26}{15}}$ |
| 3 | Разделите число 135 на части пропорционально числам 6; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{3}$. |
| 4 | Разделите число 23,8 на части пропорционально числам $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{10}$ |
| 5 | Разделите число 172,8 на части обратно пропорционально числам 4; $\frac{5}{7}$; $1\frac{1}{3}$. |
| 6 | Разделите число 7,32 на части обратно пропорционально числам 2; 3; 11. |
| 7 | Найдите четвертый член пропорции, если второй член составляет $\frac{5}{7}$, третий $\frac{1}{4}$ первого члена, а сумма этих членов равна 23. |
| 8 | Найдите отношение двух дробей, если их числители относятся как 3 : 5, а знаменатели как 9 : 2. |
| 9 | Числители трех дробей относятся как 3 : 7 : 11, а знаменатели, как 5 : 11 : 17. Найдите эти дроби, если произведение второй и третьей дробей равно $2\frac{3}{7}$. |
| 10 | Тракторист вспахал три участка. Площадь первого равна $\frac{2}{5}$ площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$. Найдите общую площадь участков, если площадь третьего на 16 га меньше площади первого. |

**Пропорции** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найдите $x$, если $\dfrac{9\left(\dfrac{108}{75}+0{,}56\right)}{5x}=\dfrac{0{,}28:\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{25}}{\dfrac{33}{2}-\dfrac{124}{9}}$ |
| 2 | Найдите $x$, если $\dfrac{\left(\dfrac{94}{50}+\dfrac{53}{25}\right)\cdot\dfrac{3}{16}}{\dfrac{5}{12}-\dfrac{13}{18}\cdot\dfrac{3}{26}}=\dfrac{x}{\dfrac{2}{15}+7{,}7:\dfrac{99}{4}}$ |
| 3 | Разделите число 150 на части пропорционально числам 8; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$. |
| 4 | Разделите число 37,4 на части пропорционально числам $11\frac{2}{3}$; $\frac{1}{7}$; 6. |
| 5 | Разделите число 190 на части обратно пропорционально числам 3; $\frac{1}{2}$; 5. |
| 6 | Разделите число 18,3 на части обратно пропорционально числам 2; 3; 5; 1. |
| 7 | Найдите четвертый член пропорции, если второй член составляет $\frac{3}{4}$, третий $\frac{2}{3}$ первого члена, а сумма первых трех членов равна 59. |
| 8 | Найдите отношение двух дробей, если их числители относятся как 3 : 2, а знаменатели как 7 : 5. |
| 9 | Числители трех дробей относятся как 1 : 2 : 5, а знаменатели, как 1 : 3 : 7. Найдите эти дроби, если их среднее арифметическое равно $\frac{200}{941}$. |
| 10 | Отношение среднемесячных зарплат первого квартала ко второму составило 7 : 8; четвертого к третьему – 9 : 8; второго полугодия к первому – 34 : 25. Найдите среднемесячную зарплату в каждом квартале, если средняя зарплата за год составила 4425 руб. |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найдите $x$, если $\dfrac{x}{\left(\dfrac{10}{3}\cdot 1{,}2+\dfrac{8}{3}\right)\cdot 0{,}375}=\dfrac{\dfrac{50}{11}\cdot 0{,}22-\dfrac{24}{25}}{\left(0{,}4-\dfrac{3}{20}\right)\cdot 0{,}8}$ |
| 2 | Найдите $x$, если $\dfrac{\dfrac{13}{6}-\dfrac{53}{6}\cdot 0{,}2}{7x}=\dfrac{\left(\dfrac{15}{2}-6{,}75\right)\cdot\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{15}{2}+4{,}75\right):0{,}5}$ |
| 3 | Разделите число 2400 на части пропорционально числам $11\frac{1}{5}$; 2; 3; $3\frac{4}{5}$. |
| 4 | Разделите число 92,5 на части пропорционально числам |
| 5 | Разделите число 76,5 на части обратно пропорционально числам $\frac{24}{7}$; 6; 4. |
| 6 | Разделите число 434 на части обратно пропорционально числам 2; 3; 5. |
| 7 | Найдите четвертый член пропорции, если второй член составляет $\frac{1}{5}$, третий $\frac{2}{9}$ первого члена, а сумма первых трех членов равна 33. |
| 8 | Найдите отношение двух дробей, если их числители относятся как 3 : 7, а знаменатели как 5 : 11. |
| 9 | Числители трех дробей относятся как 2 : 3 : 4, а знаменатели, как 5 : 6 : 7. Найдите эти дроби, если вторая дробь больше первой на $\frac{1}{15}$. |
| 10 | Премию разделили между четырьмя лицами так, что отношение сумм, полученных первым и вторым изобретателями, составило 7:8, первого и третьего – 14:11, причем первый и второй изобретатели получили 0,6 всей суммы. Какая общая сумму премии, если первый изобретатель получил на 6000 руб. больше четвертого. |

**Пропорции** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найдите $x$, если $\dfrac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4,5}{\frac{3}{5}:0,1+4,2}=\dfrac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}$ |
| 2 | Найдите $x$, если $\dfrac{11-\frac{19}{2}}{\left(1,25+\frac{5}{6}\right):\frac{1}{3}}=\dfrac{\left(6,8-\frac{26}{3}\right):\frac{35}{6}}{x}$ |
| 3 | Разделите число 112,8 на части пропорционально числам 3; $\frac{8}{3}$; $\frac{7}{3}$. |
| 4 | Разделите число 0,234 на части пропорционально числам 5,5; 2; 1,5. |
| 5 | Разделите число 230 на части обратно пропорционально числам 3; 7; $\frac{1}{5}$. |
| 6 | Разделите число 7,32 на части обратно пропорционально числам 2; 3; 11. |
| 7 | Найдите четвертый член пропорции, если второй член составляет $\frac{1}{4}$, третий $\frac{2}{3}$ первого члена, а сумма первых трех членов равна 45. |
| 8 | Найдите отношение двух дробей, если их числители относятся как 7 : 13, а знаменатели как 3 : 5. |
| 9 | Отношение первого числа ко второму равно 3:5, к третьему 4:1, отношение второго числа к четвертому равно 20:3. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных. |
| 10 | Длина Дона относится к длине Днепра как $\frac{19}{3}:5$, длина Дона относится к длине Дуная как 6,5:9,5. Найдите протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км. |

**Пропорции** **Ответы**

| № варианта / № задания | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16,5 | 70 | 0,5 | 20 |
| **2** | 14 | 8 | 2,8 | 87,5 |
| **3** | 97,2; 10,8; 27 | 120; 9; 25 | 52,5; 37,5; 2,5 | 42,3; 37,6; 32,9 |
| **4** | 5,88; 14,2; 6,3; 0,42 | 24,5; 0,3; 12,6 | 1344; 240; 360; 456 | 0,143; 0,052;0,039 |
| **5** | 18; 100; 8; 54 | 25; 150; 15 | 31,5; 18; 27 | 14; 6; 210 |
| **6** | 6,3; 4,5; 10,5 | 4,5; 3; 1,8; 9 | 210; 140; 84 | 3,96; 2,64; 0,72 |
| **7** | $4\frac{17}{27}$ | $12\frac{6}{29}$ | $\frac{33}{32}$ | $2\frac{4}{43}$ |
| **8** | $\frac{2}{15}$ | $\frac{15}{14}$ | $\frac{33}{35}$ | $\frac{35}{39}$ |
| **9** | $\frac{51}{35}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{187}{119}$ | $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$ | $\frac{4}{15}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{8}{21}$ | 48; 80; 12; 12 |
| **10** | 136 | 3500; 4000; 4800; 5400 | 16800; 19200; 13200; 10800 | 2850; 2250; 1950 |

**Пропорции** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти 15% от числа 84 |
| 2 | Найти число, если 8% от него равны 24 |
| 3 | Найти число, если $2\frac{1}{7}$% от него составляют 16,5% от 120 |
| 4 | Сколько % от числа 14 составляет число 2,1. |
| 5 | На сколько % число 200 больше 80? На сколько % число 8 меньше 200? |
| 6 | Какую часть от числа 120 составляет число 35? |
| 7 | Найти число, если 3/4 от него равны 5/8 от числа 6,12 |
| 8 | Число $a$ составляет $\frac{2}{5}$ числа $b$. На сколько % число $a$ меньше $b$? На сколько % число $b$ больше $a$? |
| 9 | Найти 30% от числа 10,6, части которого равны $17\frac{2}{3}$ |
| 10 | Найти число, $\frac{1}{5}$ часть которого равна 14% от числа $\left(3\frac{1}{3}-1\frac{5}{6}\right)\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}\cdot 2{,}4$ |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти 14% от числа 29 |
| 2 | Найти число, если 7% от него равны 84 |
| 3 | Найти число, если $1\frac{2}{3}$% от него равны 14,5% от 22 |
| 4 | Сколько % от числа 6,6 составляет число 0,363? |
| 5 | На сколько % число 1600 больше 1200? На сколько % число 1200 меньше 1600? |
| 6 | Какую часть от числа 320 составляет число 56? |
| 7 | Найти число, если 1/4 от него равна 2/5 от числа 2,5 |
| 8 | Число $a$ составляет $\frac{2}{3}$ числа $b$. На сколько % число $a$ меньше $b$? На сколько % число $b$ больше $a$? |
| 9 | Найти 120% от числа $5\frac{2}{5}$, части которого равны 16,2 |
| 10 | Найти число, $\frac{2}{7}$ которого равны 12% от числа $\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}\right)\cdot 3{,}6$ |

**Пропорции** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти 13% от числа 27 |
| 2 | Найти число, если 2,8% от него равны $11\frac{1}{5}$ |
| 3 | Найти число, если 8% от него составляют 28% от 17,2 |
| 4 | Сколько % от числа 8,5 составляет число 10,2. |
| 5 | На сколько % число 160 меньше 180? На сколько % число 180 больше числа 160? |
| 6 | Какую часть от числа 240 составляет число 48? |
| 7 | Найти число, если 1/5 от него равна 7/3 от числа 24,3 |
| 8 | Число $a$ составляет $\frac{1}{3}$ числа $b$. На сколько % число $a$ меньше $b$? На сколько % число $b$ больше $a$? |
| 9 | Найти 40% от числа $2\frac{5}{6}$, части которого равны 25,5 |
| 10 | Найти число, $\frac{1}{3}$ часть которого равна 15% от числа $\left(3\frac{3}{5}\cdot 1\frac{1}{9}-7\frac{1}{3}\cdot 1\frac{2}{9}\right)$ |

**Пропорции** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти 12% от числа 43 |
| 2 | Найти число, если 14 1/3% от него равны 2,15 |
| 3 | Найти число, если 20% от него составляют 12% от $24\frac{2}{3}$ |
| 4 | Сколько % от числа 1600 составляет число 1200? |
| 5 | На сколько % число 25 меньше 125? На сколько % число 125 больше 25? |
| 6 | Какую часть от числа 130 составляет число 39? |
| 7 | Найти число, если $\frac{3}{8}$ от него равны $\frac{2}{5}$ от числа 12,3 |
| 8 | Число $a$ в 5 раз меньше $b$. Сколько % от числа $a$ составляет число $b$? На сколько % число $a$ меньше $b$? |
| 9 | Найти 15% от числа, $2\frac{2}{3}$ части которого равны 98,4 |
| 10 | Найти число, $\frac{1}{4}$ часть которого равна 25% от числа $\left(14:4\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\cdot 8\right)$ |

**Пропорции** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 12,6 | 4,06 | 3,51 | 5,16 |
| **2** | 300 | 1200 | 400 | 0,15 |
| **3** | 121 | 191,4 | 60,2 | 14,8 |
| **4** | 15% | 5,5% | 120% | 75% |
| **5** | 150%<br>60% | 33 1/3%<br>25% | 11 1/9%<br>12,5% | 80%<br>400% |
| **6** | $\frac{7}{24}$ | $\frac{7}{40}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |
| **7** | 5,1 | 4 | 283,5 | 13,12 |
| **8** | 33 1/3%<br>50% | 60%<br>150% | 500%<br>80% | 66 2/3%<br>200% |
| **9** | 36 | 0,5 | 5,535 | 3,6 |
| **10** | 0,01 | 0,63 | –0,9 | 4 |

**Проценты и части** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Число $a$ в 3 раза меньше числа $b$. На сколько % $a$ меньше суммы $(a + b)$? |
| 2 | Число $a$ больше числа $b$ на 50%. На сколько % число $b$ меньше а? |
| 3 | Найти три числа, если первое составляет 75% от второго; второе на 20% больше третьего, а сумма всех трех чисел равна 62 |
| 4 | Найти первоначальную цену товара, если после увеличения на 15% она составила 109 руб. 25 коп. |
| 5 | При изготовлении сухарей из хлеба он теряет 80% своей массы. Из какого количества хлеба получится 20 кг сухарей? |
| 6 | В 400 г раствора содержится 250 кг кислоты. Сколько процентов воды в растворе? |
| 7 | На одном станке партию деталей можно изготовить за 5 часов, а на другом – за 7 часов. Сколько времени нужно для изготовления 120% деталей этой партии, если включены оба станка? |
| 8 | Скорость лодки увеличилась с 10 до 15 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое на тот же путь? |
| 9 | Сплав меди с оловом весом 12 кг содержит 45% меди. Сколько кг чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, содержащий 40% меди? |
| 10 | Через сколько лет утроится вклад, сданный в банк под 5% годовых? |

**Проценты и части** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти число $a$, если известно, что число $(3a + 2)$ составляет от него 350% |
| 2 | Число $b$ на 20% меньше числа $a$. На сколько % число а больше, чем $b$? |
| 3 | Найти три числа, если первое на 30% больше второго; второе составляет 80% от третьего, а их сумма равна 93 |
| 4 | Найти первоначальную цену товара, если после снижения цены на 20% он стал стоить 40 руб. |
| 5 | Сколько граммов воды нужно выпарить из 0,5 кг солевого раствора, содержащего 85% воды, чтобы получить массу, содержащую 75% воды? |
| 6 | Объем промышленной продукции увеличился в 10 раз. На сколько процентов произошло увеличение? |
| 7 | Скорость поезда увеличилась с 75 до 80 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь? |
| 8 | Число деталей, которые рабочий должен был изготовить по плану, составляет 60% числа фактически изготовленных им деталей. На сколько процентов рабочий перевыполнил план? |
| 9 | Кусок меди и цинка массой в 35 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди? |
| 10 | Через сколько лет утроится вклад, сданный в банк под 7% годовых? |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Число $a$ в 3 раза меньше числа $b$. На сколько % $b$ больше $a$? |
| 2 | Число $a$ на 25% больше числа $b$. На сколько % число $b$ меньше а? |
| 3 | Найти три числа, если первое составляет 13% от второго; третье на 10% больше второго, а сумма всех трех чисел равна 1115 |
| 4 | Товар стоил 18 тыс. рублей, а после снижения цены стал стоить 14,4 тыс. руб. На сколько процентов была снижена цена? |
| 5 | В 200 г раствора соли в воде содержится 150 г воды. Сколько процентов соли в растворе? |
| 6 | При хранении портится 25% картофеля. Сколько картофеля надо заготовить, чтобы получить 18 ¾ т? |
| 7 | Число деталей, которое рабочий должен был изготовить по плану составляет 80% числа фактически изготовленных деталей. На сколько процентов рабочий перевыполнил план? |
| 8 | Скорость поезда увеличилась с 70 до 85 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое на один и тот же путь? |
| 9 | Сколько пресной воды надо добавить к 30 л морской воды, содержащей 7% соли, чтобы концентрация соли составила 3%? |
| 10 | Через сколько лет удвоится вклад, сданный в банк под 5% годовых? |

**Проценты и части** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Найти число $a$, если известно, что число $(a + 10)$ составляет от него 140% |
| 2 | Число $a$ и $b$ относятся как 2:3. На сколько % число $b$ больше а? |
| 3 | На сколько процентов увеличится дробь, если ее числитель увеличить на 12%, а знаменатель уменьшить на 30%? |
| 4 | Найти первоначальную цену товара, если после снижения на 15% она составила 34 руб. |
| 5 | Из 20%-ного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найдите процентную концентрацию соли в получившемся растворе. |
| 6 | Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 20%. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы из них получить 4,5 кг сухих грибов? |
| 7 | Один рабочий может выполнить задание за 2 дня, а другой – за 3 дня. За сколько дней они выполнят задание, работая вместе, если второй увеличит производительность труда на 50%? |
| 8 | На сколько процентов возросла скорость автомобиля, если время, затраченное на тот же путь уменьшилось на 1/3? |
| 9 | Смешали 30% и 10% раствор соляной кислоты и получили 600 г 15% раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято? |
| 10 | Через сколько лет удвоится вклад, сданный в банк под 10% годовых? |

**Проценты и части** **Ответы**

| № варианта / № задания | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 75% | 4% | 200% | 25% |
| **2** | 33 1/3% | 25% | 20% | 50% |
| **3** | 18, 24, 20 | 31, 30, 24 | 65, 500, 550 | 60% |
| **4** | 95 р. | 50 р. | 20% | 40 р. |
| **5** | 100 кг | 200 г | 25% | 25% |
| **6** | 37,5% | 900% | 25 т | 36 кг |
| **7** | 3,5 ч | 6,25% | 25% | 1 день |
| **8** | 33 1/3% | 66 2/3% | 17,6% | 50% |
| **9** | 1,5 кг | 13,5 кг | 40 л | 150 и 450 г |
| **10** | 23 | 17 | 15 | 8 |

**Задачи на составление уравнений** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Из двух городов, расстояние между которыми 135 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного из них равна 13 км/ч, а другого – 14 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними составит 54 км? |
| 2 | Бассейн наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба наполняет его на 5 ч. Быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн? |
| 3 | Сколько граммов воды надо добавить к 100 г 30%-ной соляной кислоты, чтобы получить 10%-ную кислоту? |
| 4 | Телевизор два месяца назад стоил на 20% дешевле, чем месяц назад, когда он стоил на 10% дешевле, чем сейчас. На сколько процентов дешевле стоил телевизор два месяца назад, чем сейчас? |
| 5 | Известно, что сумма 40% числа $a$ и 45% числа $b$ равна 215, а сумма 45% числа $a$ и 40% числа $b$ равна 210. Найти числа $a$ и $b$. |
| 6 | Имеются три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением меди и никеля 4:1. Найти массу каждого исходного куска, если масса первого была вдвое больше массы второго. |
| 7 | Теплоход прошел по течению реки 96 км и столько же против течения, затратив на весь путь 10 ч. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Определить скорость теплохода в стоячей воде. |
| 8 | Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторое задание за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них заболел и второй закончил работу один за 40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание? |
| 9 | Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найти это число. |
| 10 | Хозяйка налила керосин в дырявый бидон. Сколько керосина (в процентах) вылилось из бидона за 1 ч, если через 3 ч в нем осталось на 19% меньше того количества керосина, которое в нем было через 1 ч после наполнения? |

**Проценты и части** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Велосипедист должен проехать путь из пункта А в пункт В за определенный срок. Если он будет ехать со скоростью 12 км/ч, то опоздает на 0,5 ч, если же поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет в пункт В на 12 мин. Раньше срока. Определить расстояние между пунктами А и В. |
| 2 | Два трактора различной мощности, работают совместно, вспахали поле за 12 ч. Если бы сначала работал только один трактор и вспахал бы половину поля, а затем второй закончил бы работу, то поле было бы вспахано за 25 ч. За какое время каждый трактор, работая отдельно, может вспахать все поле? |
| 3 | Сколько граммов воды надо выпарить из 100 кг массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды? |
| 4 | Цену на товар повышали дважды. На сколько процентов повысили цену во второй раз, если каждый раз ее повышали на одинаковое число процентов, а после второго повышения товар стоил в 1,44 раза больше, чем до первого повышения? |
| 5 | Сумма двух числе равна 2490 Найти эти числа, если 8,5% одного из них равны 6,5% другого. |
| 6 | Имеется 200 г сплава, содержащего золото и серебро в отношении 2:3. Сколько граммов серебра надо добавить к этому сплаву, чтобы отношение золота к серебру стало 4:1? |
| 7 | Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан на 10 мин у светофора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/ч, он прибыл в пункт назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость поезда. |
| 8 | Два крана, открытые одновременно, наполняют бассейна за 4 ч 30 мин. Если же наполнить половину бассейна через один кран, а другую половину через другой, то для наполнения бассейна потребуется 12 ч. За какое время может наполнить бассейн каждый кран в отдельности? |
| 9 | Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если к этому числу прибавить 18, то получится число на 18 меньше числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число. |
| 10 | Из сосуда испарилась вода. Сколько воды (в процентах) испаряется из сосуда в день, если через 4 дня в нем оставалось на 48,8% меньше того количества, которое в нем было через день? |

**Проценты и части** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Расстояние между двумя станциями пассажирский поезд проходит на 45 мин. Быстрее, чем товарный. Определить это расстояние, если известно, что скорость пассажирского поезда равна 48 км/ч, а скорость товарного – 36 км/ч. |
| 2 | Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 7,5 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый из них, работая отдельно, если один может разгрузить ее на 8 ч быстрее, чем другой? |
| 3 | Морская вода содержит 5% соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%? |
| 4 | Цену на книгу повышали дважды. После второго повышения она стала стоить в два раза дороже, чем вначале. На сколько процентов повысили цену в первый раз, если во второй раз цена была повышена на 25%? |
| 5 | Известно, что 30% числа $a$ на 10% больше, чем 20% числа $b$, а 30% числа $b$ на 35% больше, чем 20% числа $a$. Найти эти числа. |
| 6 | Имеются два слитка сплавов золота и серебра. В первом сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1:2, а во втором сплаве – 2:3. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7:12? |
| 7 | Две автомашины выехали одновременно из одного и того же пункта в одном направлении: одна со скоростью – 50 км/ч, другая – 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 ч 30 мин позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины. |
| 8 | Две трубы, открытые одновременно, наполняют бассейна за 5 ч. Если расход воды через в первую трубу уменьшить в 2 раза, а через вторую трубу увеличить в 2 раза, то бассейн наполнится за 4 ч. За какое время наполняет бассейн  каждая труба в отдельности? |
| 9 | Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 5. Найти это число. |
| 10 | Количество бактерий в колбе увеличивается каждый час на 4%. Сколько процентов бактерий должна содержать порция, взятая из колбы через 3 ч, чтобы в колбе осталось первоначальное число бактерий? |

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Два велосипедиста отправились одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 2 ч. Определить скорость первого велосипедиста, если расстояние между пунктами A и B равно 42 км, а скорость второго велосипедиста на 3 км/ч меньше скорости первого. |
| 2 | Два экскаватора вырыли котлован за 24 дня. Первый экскаватор мог бы выполнить эту работу в 1,5 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор мог бы выполнить эту работу? |
| 3 | Из 20%-ного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найти концентрацию получившегося раствора. |
| 4 | Цену на товар повышали дважды. После второго повышения товар стал стоить в 6 раз дороже, чем вначале. На сколько процентов повысили цену во второй раз, если в первый раз цена была повышена на 50%? |
| 5 | Известно, что 5% первого числа и 4% второго составляют в сумме 44, а 4% первого числа и 5% второго составляют в сумме 46. Найти эти числа. |
| 6 | В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 5:2 и 3:4. Сколько кг второго сплава нужно взять, чтобы после переплавки обоих сплавов получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка? |
| 7 | Пароход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Первую половину пути он шел со скоростью на 3 км/ч меньшей, а вторую – на 3 км/ч большей, чем было запланировано. На весь путь проход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал пароход. |
| 8 | Две бригады, работая вместе, выполнили задание за 6 дней. Первая бригада, работая одна, выполняет 2/5 всего задания на 2 дня дольше, чем одна вторая бригада выполняет 2/15 всего задания. За сколько дней может выполнить все задания первая бригада, если она будет работать одна? |
| 9 | Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Если из суммы квадратов цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то в результате получится данное двузначное число. Найти это число. |
| 10 | На сколько процентов в год увеличивается масса кристалла, если через 3 года его масса на 33,1% превышала его первоначальную массу? |

**Проценты и части** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 ч | 42 км | 108 км | 12 км/ч |
| **2** | 10 ч | 20 ч<br>30 ч | 12 ч<br>20 ч | 40 |
| **3** | 200 г | 50 кг | 70 кг | 25% |
| **4** | 28 | 20 | 60 | 300 |
| **5** | 200<br>300 | 1079<br>1411 | 200<br>250 | 400<br>600 |
| **6** | 1,92<br>0,96<br>9,16 | 13 г | 9 г | 21 кг |
| **7** | 20 км/ч | 50 км/ч | 60 км/ч | 12 мин |
| **8** | 50<br>75 | 6 ч<br>18 ч | 10 ч | 10 дней |
| **9** | 32 | 59 | 23 | 37 |
| **10** | 10% | 20% | 12,486% | 10% |

# 6 ПРОГРЕССИИ

## *6.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ*

### АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. Общий член арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1),$$

где $a_1$, $d$ и $n$ – первый член, разность и номер члена прогрессии соответственно.

2. $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, $k = 2, 3, \ldots, n - 1.$

3. Сумма первых $n$ членов $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n.$

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. Общий член геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

где $b_1$, $q$ и $n$ – первый член, знаменатель и номер члена прогрессии соответственно.

2. $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$, $k = 2, 3, \ldots, n{-}1.$

3. Сумма первых $n$ членов $S_n = \dfrac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1-q}$ при $q \neq 1$.

4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q} \text{ при } |q| < 1.$$

## *6.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

1. Найдите разность $d$ арифметической прогрессии, если известно, что сумма второго и пятого членов равна 8, а сумма третьего и седьмого членов равна 14.

*Решение.*

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 8 \\ a_3 + a_7 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 8 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 5d = 8 \\ 2a_1 + 8d = 14. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим $3d = 6$ или $d = 2$.

*Ответ*: 2.

2. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму одиннадцати первых членов прогрессии.

*Решение.*

$$a_3 + a_9 = 8, \quad (a_1 + 2d) + (a_1 + 8d) = 8, \quad 2a_1 + 10d = 8,$$
$$S_{11} = (2a_1 + d(11 - 1)) \cdot 11/2 = (2a_1 + 10\ d) \cdot 11/\ 2 = 8 \cdot 11/2 = 44.$$

*Ответ*: 44.

3. Найдите сумму всех натуральных двузначных чисел, которые при делении на 7 дают остаток, равный 4, не устанавливая эти числа.

*Решение.*

$$a_1 = 11, \ \ a_n = 95, \ \ d = 7.$$
$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \Rightarrow \quad 95 = 11 + 7(n - 1) \quad \Rightarrow \quad n = 13.$$
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{11 + 95}{2} 13 = 689.$$

*Ответ*: 689.

4. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма второго и четвертого членов равна 39/4, а сумма первого и третьего членов равна 13/2.

*Решение.*

$$\begin{cases} b_1+b_3=13/2 \\ b_2+b_4=39/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q^2=13/2 \\ b_1q+b_1q^3=39/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q^2)=13/2 \\ b_1q(1+q^2)=39/4. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим $q = 3/2$ .

*Ответ*: 2 и 3/2 .

5. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если произведение ее трех первых членов равно 1728, а их сумма равна 63.

*Решение.*

$$\begin{cases} \mathrm{b}_1\cdot b_2\cdot b_3=1728 \\ \mathrm{b}_1+b_2+b_3=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{b}_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2=1728 \\ \mathrm{b}_1+b_1q+b_1q^2=63 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (b_1q)^3=1728 \\ \mathrm{b}_1+b_1q+(b_1q)q=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q=12 \\ \mathrm{b}_1+12+12\cdot q=63. \end{cases}$$

Подставив $b_1$ в первое уравнение системы, получим:

$$(51-12q)\,q=12 \quad \Leftrightarrow \quad 12q^2-51q+12=0.$$

Это уравнение имеет два корня: 4 и 1/4, которым соответствуют значения $b_1$ : 3 и 48.

*Ответ*: 3 и 4; 48 и 1/4.

6. Найдите $x$ и $y$, если числа $7x-3y-1$, $x+y-4$, 8 образуют арифметическую прогрессию, а числа $-2$, $x-2y$, $-x-7y+1/2$ образуют геометрическую прогрессию.

*Решение.*

**ИСПОЛЬЗУЯ СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИЙ, СОСТАВИМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ:**

$$\begin{cases} x+y-4=\dfrac{7x-3y-1+8}{2} \\ x-2y=\sqrt{(-2)(-7y-x+1/2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ (x-1)^2+4y^2-14y-4xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases}.$$

Решив квадратное уравнение, получим $x_1 = 5$; $y_1 = 8$ или $x_2 = -1$; $y_2 = 2$.

*Ответ*: (5, 8); (–1, 2).

7. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен 3, последний 1536, а сумма членов равна 3069.

*Решение.*

$$\begin{cases} b_n = b_1 q^{n-1} \\ S_n = \dfrac{b_1 - b_n q}{1-q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1536 = 3q^{n-1} \\ 3069 = \dfrac{3-1536q}{1-q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 512 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 2^9 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow n = 10.$$

*Ответ*: 10.

8. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию, если же от второго и третьего членов получившейся арифметической прогрессии отнять по единице, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

*Решение.*

$b_1$, $b_1q$, $b_1q^2$ – геометрическая прогрессия;
$b_1$, $b_1q$, $b_1q^2–4$ – арифметическая прогрессия;
$b_1$, $b_1q–1$, $b_1q^2–5$ – геометрическая прогрессия.

Используя свойства арифметической и геометрической прогрессий, составим систему уравнений.

$$\begin{cases} \mathrm{b}_1 q = \dfrac{b_1 + b_1 q^2 - 4}{2} \\ b_1 q - 1 = \sqrt{b_1(b_1 q^2 - 5)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 q = b_1 + b_1 q^2 - 4 \\ (b_1 q - 1)^2 = b_1(b_1 q^2 - 5) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 4 \\ b_1^{\,2} q^2 - 2b_1 q + 1 = b_1 q^2 - 5b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 4 \\ b_1(2q - 5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2q-5} \\ q^2 - 2q + 1 = 4(2q - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2q-5} \\ q^2 - 10q + 21 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $b_1 = 1$; $q = 3$ или $b_1 = 1/9$; $q = 7$.

*Ответ*: {1, 3, 9}; {1/9, 7/9, 49/9}.

9. Числа lg0,01; lg0,1; lg$x$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите $x$.

*Решение.*

$$\lg 0{,}01 = -2,\quad \lg 0{,}1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = -2 \\ b_2 = b_1 q = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = -2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

$$b_3 = \lg x = b_2 \cdot q = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

*Ответ*: $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

10. Числа $a$, $b$, $c$ образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $a(b^2 - c^2) = c(a^2 - b^2)$.

*Решение.*

По условию $b = aq$, $c = aq^2$,
где $q$ – знаменатель геометрической прогрессии.

$$a(b^2 - c^2) - c(a^2 - b^2) = a(a^2q^2 - a^2q^4) - aq^2(a^2 - a^2q^2) =$$
$$= a^3q^2(1 - q^2) - a^3q^2(1 - q^2) = 0.$$

11. Положительные числа $a$, $b$, $c$ ($a \neq b \neq c$) образуют арифметическую прогрессию, а числа $a$, $d$, $c$ – геометрическую прогрессию. Докажите, что $b > d$.

*Решение.*

По свойствам членов арифметической и геометрической прогрессий

$$b = \frac{a+c}{2}, \qquad d = \sqrt{ab}.$$

Среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, поэтому $b = \dfrac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab} = d$. Таким образом неравенство доказано.

При $a \neq c$ неравенство будет строгим.

12. Между числами 3 и 3/16 вставлены три числа так, что они вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию. Определите знаменатель прогрессии.

*Решение.*

Известно, что $b_1 = 3$ и $b_5 = 3/16$. Тогда $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 3q^4$. Отсюда $q^4 = 1/16$ и $q = \pm 1/2$.

*Ответ*: $\pm 1/2$ .

13. Найдите три первых числа бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна 93/16.

*Решение.*

$$\begin{cases} S = 6 \\ S_5 = 93/16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 6 \\ \dfrac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \dfrac{93}{16} \end{cases} \Rightarrow \quad 6(1-q^5) = \frac{93}{16} .$$

Отсюда следует, что $q = 1/2$ и $b_1 = 3$. Затем находим $b_2 = b_1 \cdot q = 3/2$ и $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 3/4$.

*Ответ*: $\{3, 3/2, 3/4\}$.

## *6.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

1. Найдите сумму всех натуральных двузначных чисел, каждое из которых при делении на 4 дает остаток, равный 3, не устанавливая эти числа.

   *Ответ*: 1265 .

2. Найдите первый член арифметической прогрессии, если сумма второго и седьмого членов равна 12, а разность шестого и третьего членов равна 6.

   *Ответ*: –1.

3. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом $n$ сумма ее первых $n$ членов равна $5n^2$. Найдите разность прогрессии и три первых члена.

   *Ответ*: 10; {5, 15, 25}.

4. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен 768, последний 12, а сумма членов равна 1524.

   *Ответ*: 7.

5. Найдите третий член возрастающей геометрической прогрессии, если разность четвертого и первого членов равна 10,5 , а разность третьего и второго равна 3.

   *Ответ*: 6.

6. Найдите первый член и знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма пятого и седьмого членов равна квадрату ее третьего члена и первый член прогрессии в 2,5 раза больше ее знаменателя.

   *Ответ*: 5/4; 1/2 .

7. Найдите $x$ и $y$, если числа $x - y + 3$, $-3$, $-5x - 3y - 13$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $2x + y$, $2$, $6 - 2x - 2y/3$ образуют геометрическую прогрессию.

   *Ответ*: {4, –5}; {2, –3}.

8. Даны четыре числа, из которых первые три являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три – последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа, если сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних чисел равна 24.

   *Ответ*: {32, 16, 8, 0}; {2, 6, 18, 30}.

9. Сумма четырех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 10. Если отбросить третье число, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

*Ответ*: $\{1, 2, 3, 4\}$.

10. Числа a, $b$, c образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $\frac{3a+7b}{3b+7c}=\frac{5a-7b}{5b-7c}$.

11. Найдите третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 8/5, а второй член равен –1/2 .

*Ответ*: 1/8.

## *6.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ*

**Прогрессии** **Вариант 1**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Шестой член арифметической прогрессии в 4 раза меньше девятого члена, а их сумма равна 20. Найдите сумму девяти первых членов прогрессии. |
| 2 | Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 171, а третье больше первого в 6 раз. Найти эти числа. |
| 3 | Вычислите $-\frac{25}{2}-\frac{71}{6}-\frac{67}{6}-...-\frac{5}{2}$ |
| 4 | В арифметической прогрессии известны члены $a_{14}$ = – 121 и $a_{37}$ = 132. Укажите номер $n$ члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены положительны. |
| 5 | В арифметической прогрессии из 10 членов сумма членов, стоящих на четных местах равна 50, а членов, стоящих на нечетных местах, равна 35. Найдите первый член и разность прогрессии. |
| 6 | Сумма первого и третьего членов возрастающей геометрической прогрессии равна 30, а их произведение равно 81. Найдите знаменатель прогрессии. |
| 7 | Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 26, а их произведение равно 216. |
| 8 | В геометрической прогрессии с положительными членами первый и пятый члены равны соответственно 0,5 и 8, а $n$-ый член равен 64. Найдите $n$. |
| 9 | Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй ее член равен 0,4, а знаменатель равен 0,2. |
| 10 | Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если от второго и третьего ее членов отнять по единице, то прогрессия станет геометрической. Найдите эти числа. |

**Прогрессии** **Вариант 2**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Сумма 3-го и 7-го членов арифметической прогрессии равна 10. Найти сумму первых девяти членов прогрессии. |
| 2 | Сумма первого, третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна (–12), а их произведение равно 80. Найдите первый член и разность прогрессии. |
| 3 | Вычислите $53+50+47+\ldots-4$ |
| 4 | В арифметической прогрессии известны члены $a_{14}$ = – 111 и $a_{42}$ = –27. Укажите номер $n$ члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены больше –42. |
| 5 | Определите, сколько следует взять членов арифметической прогрессии, чтобы их сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20. |
| 6 | Найдите четвертый член геометрической прогрессии со знаменателем –3, если сумма первых трех ее членов равна 49/3. |
| 7 | Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, если разность между ее четвертым и первым членами равна 78, а сумма первых трех членов равна 39. |
| 8 | В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, а произведение второго и предпоследнего членов равно 128. Найдите число членов этой прогрессии, если сумма всех ее членов равна 126. |
| 9 | Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой равен 9, а пятый равен 1/3. |
| 10 | Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить третье число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите эти числа. |

**Прогрессии** **Вариант 3**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Четвертый член арифметической прогрессии в 5 раз больше ее второго члена, а разность шестого и первого членов прогрессии равна 30. Найдите девятый член прогрессии. |
| 2 | Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 156. Найти второе число. |
| 3 | Вычислите $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}+2+...+7$. |
| 4 | В арифметической прогрессии девятый член в три раза больше третьего, а при делении седьмого члена на третий получается частное 2 и остаток 1. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии. |
| 5 | В арифметической прогрессии 10 членов. Найдите первый член прогрессии, если сумма членов, стоящих на четных местах, равна 200, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 160. |
| 6 | Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, второй член которой равен (–4), а пятый равен 32. |
| 7 | Разность пятого и третьего членов возрастающей геометрической прогрессии равна 144, а произведение этих членов равно 2916. Найдите знаменатель и первый член прогрессии. |
| 8 | Найдите три числа, образующих убывающую геометрическую прогрессию, если их произведение равно 729, а их среднее арифметическое равно 13. |
| 9 | Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{7}$, если ее сумма равна 21. |
| 10 | Найдите четыре положительных числа, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую прогрессию, если сумма первых трех чисел равна 12, а последних трех чисел равна 19. |

**Прогрессии** **Вариант 4**

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Сумма шестого и девятого членов арифметической прогрессии равна 20, а их произведение равно 64. Найдите десятый член прогрессии, если ее первый член отрицателен. |
| 2 | Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 162. Сумма первых двух чисел больше суммы второго и третьего на 12. Найти эти числа. |
| 3 | Вычислите $\frac{1}{5}+\frac{8}{15}+\frac{13}{15}+...+\frac{31}{5}$ |
| 4 | В арифметической прогрессии известны члены $a_{10} = 3$ и $a_{100} = 543$. Укажите номер $n$ члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены не меньше 213. |
| 5 | Установите число членов арифметической прогрессии, третий член которой равен 5, шестой – 11, а сумма всех членов равна 324. |
| 6 | Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен ½, а четвертый член равен 4. |
| 7 | Найдите первый член геометрической прогрессии, если разность между ее третьим и первым членами равна 9, а разность между пятым и третьим членами равна 36. |
| 8 | Найдите первый член убывающей геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 14, а сумма их квадратов равна 84. |
| 9 | Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 2, если ее первый член равен 0,25. |
| 10 | Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получаются три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найдите седьмой член геометрической прогрессии. |

**Прогрессии** **Ответы**

| № варианта / № задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 45 | 45 | 20 |
| 2 | 38; 133; 228 | –10; 3 | 52 | 60;54;48 |
| 3 | –120 | 490 | 32,5 | 60,8 |
| 4 | 26 | 38 | 55 | 45 |
| 5 | –5; 3 | 46 | 0 | 18 |
| 6 | 3 | –63 | 22 | 31,5 |
| 7 | 80 | 120 | 3; 4 | 3 |
| 8 | 8 | 6 | 27; 9; 3 | 8 |
| 9 | 2,5 | 40,5 | 18 | 7/8 |
| 10 | {1; 3; 9} или $\left\{\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{49}{9}\right\}$ | {4; 8; 16} или $\left\{\frac{4}{25}; -\frac{16}{25}; \frac{64}{25}\right\}$ | {2; 4; 6; 9} | 5103 или 7/81 |

## *КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛАМ 5, 6*

### *ТЕСТ 1*

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что при делении числа пропорционально числам $m$ и $n$ и обратно пропорционально числам $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, результат один и тот же? |
| 2 | Верно ли, что при любых $l > 0$ из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует $\frac{a+l}{b+l} = \frac{c+l}{d+l}$? |
| 3 | Верно ли, что среднее арифметическое двух положительных чисел всегда больше среднего геометрического этих чисел? |
| 4 | Верно ли, что найдутся два различных положительных числа, среднее гармоническое которых равно их среднему геометрическому? |
| 5 | Верно ли, что для положительных чисел $a < b < c < d$ всегда справедливо неравенство $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \le \frac{b+d}{2}$? |
| 6 | Верно ли, что при любых $a$, $b$ справедливо неравенство $a^2 + b^2 \le ab$? |
| 7 | Верно ли, что 17% от 13 больше 13% от 17? |
| 8 | Верно ли, что при увеличении числа в 3 раза, оно увеличивается на 300%? |
| 9 | Верно ли, что при уменьшении числа на 50% оно уменьшается в 2 раза? |
| 10 | Верно ли, что если число $a$ меньше числа $b$ на 40%, то число $b$ больше числа $a$ на 60%? |
| 11 | Верно ли, что после увеличения числа на 25% для возвращения к исходному числу следует полученное число уменьшить на 20%? |
| 12 | Верно ли, что если две величины пропорциональны, то при увеличении одной на $q$%, другая увеличится на это же число процентов %? |
| 13 | Верно ли, что если два числа обратно пропорциональны, то при увеличении одного на $q$%, другое уменьшится на это же |

| | |
|---|---|
| | число процентов? |
| 14 | Верно ли, что существует натуральное число $n$, составляющее 25% числа $n^3+2n-4$? |
| 15 | Верно ли, что 20% четверти числа составляют $\frac{1}{20}$ часть этого числа? |
| 16 | Верно ли, что НОД 96 и 168 равен 24? |
| 17 | Верно ли, что выгоднее хранить деньги в банке под 8% годовых, чем под 2% в квартал? |
| 18 | Верно ли, что число $\sqrt{3}-4\cos^2 15°$ целое? |
| 19 | Верно ли, что если отрезок длиной 10 см разделить на 3 части в отношении 4 : 6 : 5, то длина меньшей части составит 8/3 см? |
| 20 | Верно ли, что если три последовательных числа образуют геометрическую прогрессию, то их обратные величины образуют арифметическую прогрессию? |
| 21 | Верно ли, что если скорость велосипедиста в 5 раз меньше скорости автомобиля и в 2 раза больше скорости пешехода, то для прохождения одного и того же расстояния пешеходу потребуется в 10 раз больше времени, чем автомобилю? |
| 22 | Верно ли, что при увеличении производительности на 20%, время выполнения заданной работы сократится в 5 раз? |
| 23 | Верно ли, что если один насос может наполнить бассейн за $\frac{1}{2}$ часа, а второй за $\frac{1}{3}$ часа, то вместе они смогут наполнить бассейн за $\frac{1}{6}$ часа? |
| 24 | Верно ли, что если смешать 2 части 20%-ного и 1 часть 60%-ного растворов, то получится 40-ный раствор? |
| 25 | Верно ли, что стороны треугольника могут образовывать арифметическую прогрессию? |
| 26 | Верно ли, что существуют натуральные числа $m$ и $n$, для которых $5m^2=2n^5$? |
| 27 | Верно ли, что при перестановке цифр любого простого двузначного числа, получается простое число? |
| 28 | Верно ли, что сумма всех двузначных чисел кратных пяти равна 945? |
| 29 | Верно ли, что если $x+\frac{1}{x}$ – целое число, то $x^2+\frac{1}{x^2}$ тоже целое число? |

| | |
|---|---|
| 30 | Верно ли, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел больше суммы их обратных величин, то равно одно из этих чисел больше 1? |
| 31 | Верно ли, что существуют два числа, сумма которых втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения? |
| 32 | Верно ли, что существует натуральное число $n$, составляющее 50% числа $n^3 - 4$? |
| 33 | Верно ли, что знаменатель геометрической прогрессии, у которой $b_3 = 36$, $b_5 = 16$, равен $\frac{2}{3}$? |
| 34 | Верно ли, что числа $2;\ 3\frac{1}{3};\ 5;\ 5{,}4$ не могут являться членами одной арифметической прогрессии? |
| 35 | Верно ли, что знаменатель любой геометрической прогрессии, у которой $b_1 > 0$, $b_5 > 0$, положителен? |
| 36 | Верно ли, что любые два неравных положительных числа и их среднее геометрическое образуют три последовательных члена арифметической прогрессии? |
| 37 | Верно ли, что три различных положительных числа могут являться тремя последовательными членами геометрической прогрессии и тремя последовательными членами арифметической прогрессии одновременно? |
| 38 | Верно ли, что числа $-1;\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ 3$ не могут являться членами одной геометрической прогрессии? |
| 39 | Верно ли, что сумма первых семи членов арифметической прогрессии $a_1 = 0$, $d = 9$, больше суммы первых девяти членов арифметической прогрессии $a_1 = 0$, $d = 7$? |
| 40 | Верно ли, что сумма любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой больше нуля, больше первого члена этой прогрессии? |

## ТЕСТ 2

| № задания | Задание |
|---|---|
| 1 | Верно ли, что при делении числа пропорционально числам $m$ и $n$ и обратно пропорционально числам $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{n}{m+n}$, результат один и тот же? |
| 2 | Верно ли, что при любых $l>0$ из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует $\frac{a-l}{b-l}=\frac{c-l}{d-l}$? |
| 3 | Верно ли, что среднее арифметическое двух положительных чисел всегда меньше среднего квадратического этих чисел? |
| 4 | Верно ли, что найдутся два различных положительных числа, среднее геометрическое которых равно их среднему квадратическому? |
| 5 | Верно ли, что для положительных чисел $a<b<c<d$ всегда справедливо неравенство $\sqrt{ac}<\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}$? |
| 6 | Верно ли, что число $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$ больше 1? |
| 7 | Верно ли, что 19% от 17 меньше 17% от 19? |
| 8 | Верно ли, что при увеличении числа на 200% оно увеличивается в 2 раза? |
| 9 | Верно ли, что при уменьшении числа в 4 раза оно уменьшается на 75%? |
| 10 | Верно ли, что если число $a$ больше числа $b$ на 50%, то число $b$ меньше числа $a$ на 25%? |
| 11 | Верно ли, что после уменьшения числа на 20% для возвращения к исходному числу следует полученное число увеличить на 25%? |
| 12 | Верно ли, что при увеличении числа на $q$%, квадрат этого числа увеличится на $q^2$%? |
| 13 | Верно ли, что НОК чисел 96 и 168 равен 672? |
| 14 | Верно ли, что НОД чисел 99 и 363 равен 33? |

| | |
|---|---|
| 15 | Верно ли, что 150% трети числа составляют $\frac{1}{2}$ часть этого числа? |
| 16 | Верно ли, что НОК двух чисел может равняться их НОД? |
| 17 | Верно ли, что выгоднее хранить деньги в банке под 12% годовых, чем под 1% в месяц? |
| 18 | Верно ли, что если в геометрической прогрессии $b_3b_5b_{10} = -8$, то $b_4b_8 = 4$? |
| 19 | Верно ли, что если отрезок длиной 10 см разделить на 3 части в отношении 4 : 6 : 5, то длина большей части составит 4 см? |
| 20 | Верно ли, что существует положительное число $a$, равное 20% числа $a^2 + 3a - 8$? |
| 21 | Верно ли, что если скорость мотоциклиста составляет $\frac{2}{3}$ скорости автомобиля, а скорость велосипедиста в 4 раза меньше скорости мотоциклиста, то одно и то же расстояние автомобиль проедет в 6 раз быстрее велосипедиста? |
| 22 | Верно ли, что для сокращения времени выполнения данной работы в два раза, необходимо увеличить производительность на 50%? |
| 23 | Верно ли, что если один насос может наполнить бассейн за $\frac{1}{2}$ часа, а второй за $\frac{1}{3}$ часа, то вместе они смогут наполнить бассейн за $\frac{1}{5}$ часа? |
| 24 | Верно ли, что при разбавлении 2 частей 60%-ного раствора одной частью воды получится 40-ный раствор? |
| 25 | Верно ли, что углы треугольника могут образовывать арифметическую прогрессию? |
| 26 | Верно ли, что существуют натуральные числа $m$ и $n$, для которых $500m - 7n = 1$? |
| 27 | Верно ли, что произведение любых двух последовательных четных чисел делится на 8? |
| 28 | Верно ли, что если $a^2 + b^2 \le 2$, то $a + b \le 2$? |
| 29 | Верно ли, что существует арифметическая прогрессия, у которой сумма $n$ первых членов равна $n^2$? |

| | |
|---|---|
| 30 | Верно ли, что, не имея метра, нельзя отрезать 0,5 метра от куска материи в 2/3 метра? |
| 31 | Верно ли, что разность двух простых двузначных чисел, получающихся друг из друга перестановкой цифр, не может быть квадратом целого числа? |
| 32 | Верно ли, что сумма всех двузначных чисел, кратных 7, равна 754? |
| 33 | Верно ли, что знаменатель геометрической прогрессии, у которой $S_2 = 6$, $b_2 = 4$, равен 2? |
| 34 | Верно ли, что числа $-2\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $2\frac{1}{3}$; $4$ не могут являться членами одной арифметической прогрессии? |
| 35 | Верно ли, что знаменатель любой геометрической прогрессии, у которой $b_1 > 0$, $b_6 > 0$, положителен? |
| 36 | Верно ли, что любые два неравных положительных числа и их среднее арифметическое составляют три последовательных члена геометрической прогрессии? |
| 37 | Верно ли, что два различных положительных числа и отрицательное число не могут являться последовательными членами арифметической и геометрической прогрессии одновременно? |
| 38 | Верно ли, что числа $2$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{8}$ не могут являться членами одной геометрической прогрессии? |
| 39 | Верно ли, что сумма первых шести членов арифметической прогрессии $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{5}$, меньше суммы первых семи членов арифметической прогрессии $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{7}$? |
| 40 | Верно ли, что сумма любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше нуля, меньше первого члена этой прогрессии? |

**Ответы к тестам**

| Тест 1 | | | | Тест 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ | № задания | ответ |
| **1** | да | **21** | да | **1** | да | **21** | да |
| **2** | нет | **22** | нет | **2** | нет | **22** | нет |
| **3** | да | **23** | нет | **3** | да | **23** | да |
| **4** | нет | **24** | нет | **4** | нет | **24** | да |
| **5** | нет | **25** | да | **5** | нет | **25** | да |
| **6** | нет | **26** | да | **6** | нет | **26** | да |
| **7** | нет | **27** | нет | **7** | нет | **27** | да |
| **8** | нет | **28** | да | **8** | нет | **28** | да |
| **9** | да | **29** | да | **9** | да | **29** | да |
| **10** | нет | **30** | да | **10** | нет | **30** | нет |
| **11** | нет | **31** | да | **11** | да | **31** | нет |
| **12** | да | **32** | да | **12** | да | **32** | да |
| **13** | нет | **33** | да | **13** | да | **33** | да |
| **14** | да | **34** | да | **14** | да | **34** | да |
| **15** | да | **35** | нет | **15** | да | **35** | да |
| **16** | да | **36** | нет | **16** | нет | **36** | да |
| **17** | нет | **37** | нет | **17** | нет | **37** | да |
| **18** | да | **38** | да | **18** | да | **38** | да |
| **19** | да | **39** | нет | **19** | да | **39** | да |
| **20** | нет | **40** | да | **20** | да | **40** | да |